Chapitre 1 - Les ondes

Une onde est un phénomène périodique dans le temps et dans l'espace correspondant au déplacement de proche en proche de l'oscillation d'un objet physique. Ce phénomène permet le transport d'énergie et donc sa propagation d'un point à l'autre de l'espace. Une onde peut alors se décrire comme un phénomène spatio-temporel qui intervient dans de très nombreux processus physiques dès qu'il y a transport d'énergie d'un point à l'autre de l'espace (figure 1.1), comme par exemple :

- le son, qui est une onde acoustique, correspondant au déplacement de zones d'étirement et de compression d'un gaz (air…), d'un liquide (eau…) ou d'un solide.
- la chaleur d'un matériau, qui est créée par les vibrations des atomes.
- les séismes, qui sont des ondes mécaniques se propageant dans la croûte terrestre.
- les vagues, qui peuvent se décrire comme une onde se déplaçant à la surface de l'eau (déplacement des molécules d'eau perpendiculairement à sa surface).

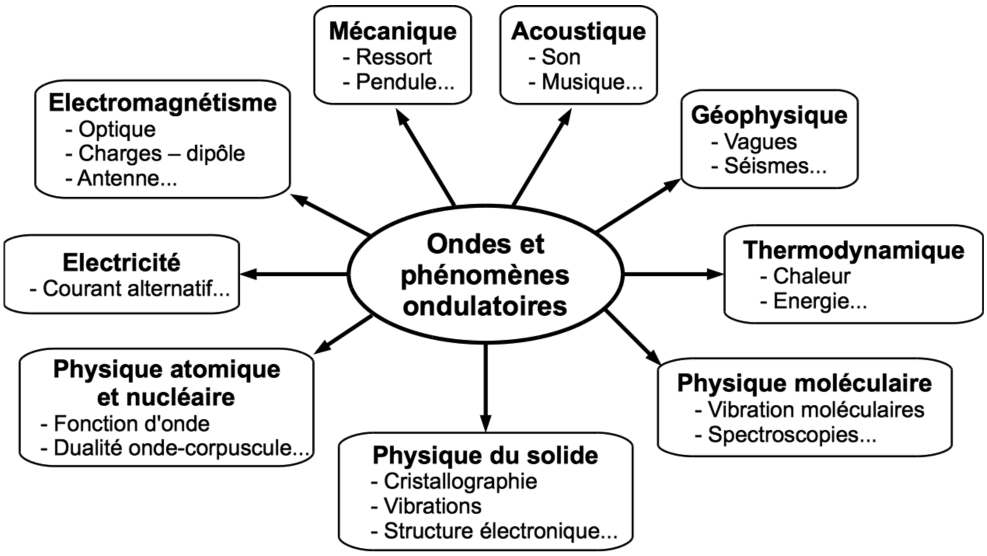

Figure 1.1
Représentation schématique des différents domaines de la physique où peuvent intervenir les ondes et les phénomènes ondulatoires

La base des ondes étant l'oscillation locale d'un objet, nous allons dans un premier temps décrire les mouvements oscillants pour ensuite décrire les phénomènes ondulatoires et le transport de ces oscillations dans l'espace.

I. Oscillations et oscillateurs

Une oscillation apparaît lorsqu'un objet immobile est déplacé de sa position d'équilibre puis soumis à une force de rappel qui le pousse à revenir à sa position d'équilibre. Ainsi, une oscillation apparaît lorsque l'objet est mis hors équilibre et qu'il « souhaite » revenir à sa position d'équilibre. L'objet se déplace alors périodiquement et suit un mouvement régulier autour de sa position d'équilibre.

Pour être mis hors équilibre, l'objet doit être soumis à une force initiale qui va le déplacer de sa position d'équilibre vers une autre position. Deux cas peuvent être considérés :

1. Soit cette force est appliquée uniquement à l'instant t=0s. Cette force est alors appelée impulsion initiale et entraîne uniquement la mise hors équilibre de l'objet pour ensuite ne plus être appliquée à l'objet. L'oscillation qui en résulte est dite libre, c'est-à-dire que, une fois lâché, l'objet oscille librement sans nouvelle sollicitation extérieure. L'objet n'est soumis qu'aux forces liées à son environnement immédiat (force de rappel, forces de frottement, poids…).
2. Soit cette force est appliquée de manière continue. L'oscillation est entretenue par le maintien de la force extérieure. La force est donc appliquée à l'instant initial (t=0s) et ensuite de manière continue pendant un temps infini. L'oscillation est alors dite forcée car la force extérieure oblige l'objet à osciller avec une certaine amplitude et une certaine période.

Nous traiterons ces deux cas successivement.

I.1 Oscillation libre

I.1.1 Oscillation harmonique

Pour illustrer ce type d'oscillation, nous nous intéresserons dans un premier temps à un cas simple : le mouvement sans frottement d'une masse, m, située à l'extrémité d'un ressort positionné horizontalement. Une des extrémités du ressort est fixe et seule l'extrémité où est située la masse peut se déplacer.
Le ressort est caractérisé par une constante de raideur, k, qui détermine l'intensité de la force de rappel qui va ramener la masse à sa position d'équilibre en cas de déplacement de celle-ci.
Comme indiqué précédemment, la masse est tout d'abord soumise à une force $\mathbf{F_0}$ et déplacée selon l'axe des x jusqu'à une position x_0 par rapport à sa position d'équilibre définie ici comme étant x=0 (figure 1.2). Une fois déplacée, la masse est alors lâchée sans nouvelle intervention extérieure.
Pour décrire le mouvement de la masse, nous devons tout d'abord faire le bilan des forces qui s'exercent sur la masse.
Etant donné que la masse n'est pas soumise à des forces de frottement, seulement trois forces s'appliquent sur la masse :

La force de rappel, $\mathbf{F}$

La force de rappel, $\mathbf{F}$, est la force imposée par le ressort qui va tendre à ramener la masse à sa position d'équilibre. Cette force est orientée selon l'axe du ressort (direction des x dans notre cas). Elle a alors pour formulation :

$$\mathbf{F} = -k.\mathbf{x}$$

avec k la constante de raideur du ressort. Plus cette constante a une valeur élevée (ressort d'autant plus raide), plus la force appliquée est élevée. **x** est le vecteur position de la masse par rapport à l'origine du repère. La norme de **x** correspond alors à la distance, x, entre la masse et sa position d'équilibre (ici x=0). Plus la distance x est élevée, plus la force est intense (plus la masse est loin de sa position d'équilibre, plus le ressort va « vouloir » la ramener à sa position d'équilibre). Le signe négatif indique que la force de rappel s'oppose toujours au déplacement de la masse par rapport à sa position d'équilibre.

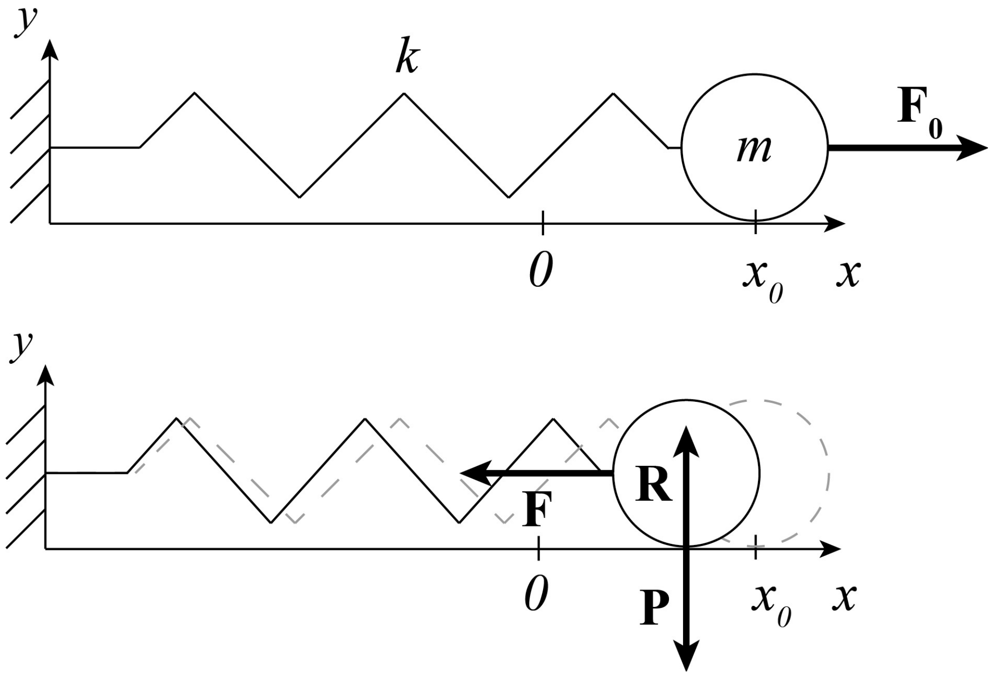

Figure 1.2
Représentation schématique du ressort de constante de raideur, k, et de la masse, m, dans le cas de l'oscillation harmonique sans frottement. En haut : lors du déplacement de la masse en position hors équilibre jusqu'à la positon $x=x_0$ sous l'effet de la force $\mathbf{F_0}$. En bas : représentation des forces qui s'exercent sur la masse m après l'arrêt de la soumission de la force $\mathbf{F_0}$.

Le poids de la masse, **P**

Le poids défini par la force de gravitation est orienté perpendiculairement à l'axe du ressort (direction des y). Il est proportionnel à la masse tel que :

$$\mathbf{P} = m.\mathbf{g}$$

avec **g**, l'accélération de la pesanteur dont la norme est 9,81 m.s^{-2}.

La réaction du support, **R**

Cette force correspond à l'effet du support sur lequel est posée la masse. La masse se déplace sur ce support. Elle est orientée perpendiculairement à l'axe du ressort.

Etant donné que la masse ne va pas pénétrer dans le support et qu'elle ne va pas non plus décoller du support, on suppose que **R** est constante et qu'elle s'oppose au poids telle que :

$$\mathbf{R}=-\mathbf{P}.$$

Pour déterminer l'équation du mouvement de la masse, on applique le principe fondamental de la dynamique qui relie l'accélération, **a**, de la masse aux forces extérieures qui s'appliquent sur la masse, tel que :

$$m\mathbf{a} = \sum \text{Forces extérieures} = \mathbf{F} + \mathbf{R} + \mathbf{P}$$

On décompose alors l'accélération et les forces selon les deux directions x et y.

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix},\ \mathbf{F} = -k\,\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -k\,x \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{P} = m\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{R} = -\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ R = mg \end{pmatrix}$$

Les composantes de l'accélération sont alors égales aux composantes des forces selon les deux directions.

$$ma_x = -k\,x \text{ et } ma_y = R - mg = 0$$

La composante de l'accélération selon y étant nulle, la masse n'a pas de mouvement dans cette direction, perpendiculaire au support. Elle n'a donc qu'un mouvement selon la direction x.
L'accélération étant la dérivée seconde de la position par rapport au temps, on peut écrire :

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2}$$

On en déduit l'équation du mouvement :

$$ma_x + k\,x = m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

La solution à cette équation différentielle est du type (voir annexe 1, section I) :

$$x(t) = A_1e^{i\omega t} + A_2e^{-i\omega t}$$

avec A_1 et A_2 des constantes réelles et $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Les constantes A_1 et A_2 peuvent se calculer à partir des conditions initiales, c'est-à-dire des conditions à l'instant t=0s. Si on suppose que l'instant initial correspond au moment où la masse est lâchée après avoir été déplacée au point $x = x_0$, on peut alors définir deux conditions initiales :

1. La position de la masse à $t = 0$ s est x_0, soit :
$$x(0) = A_1 + A_2 = x_0$$
2. La masse est lâchée sans vitesse et donc la vitesse initiale est égale à 0 m.s^{-1}, soit :
$$v(0) = \frac{dx}{dt}(0) = i\omega A_1 - i\omega A_2 = 0$$
car la vitesse est la dérivée temporelle de la position.

En utilisant ces deux conditions aux limites, on obtient un système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = x_0 \\ A_1 - A_2 = 0 \end{cases}$$

dont les solutions sont $A_1 = A_2 = \dfrac{x_0}{2}$.

La solution finale de l'équation du mouvement est alors :

$$x(t) = x_0\left(\frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}\right) = x_0 \cos(\omega t)$$

Cette équation donne directement l'évolution de la position de la masse en fonction du temps. Le mouvement de la masse correspond donc à une oscillation de la masse périodique et cosinusoïdale (figure 1.3) dont les caractéristiques sont les suivantes :

- L'amplitude de l'oscillation est x_0, c'est à dire que la masse oscille entre les positions extrêmes : $x = -x_0$ et $x = x_0$.
- La période de l'oscillation est $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ (en seconde). T correspond au temps nécessaire pour que la masse revienne à la même position (cela peut donc correspondre au temps entre deux élongations maximales du ressort lorsque $x = x_0$ ou entre deux passages de la masse à x=0). Deux autres paramètres temporels peuvent être calculés : la fréquence, $\nu = \dfrac{1}{T} = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ (en s^{-1} ou Hz),[1] qui détermine le nombre d'oscillations par seconde et la pulsation, $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi\nu = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ (en rad.s^{-1}), équivalent à un nombre de tour par seconde.

[1] Attention : il ne faut pas confondre la fréquence ν qui est représentée par la lettre grec nu et la vitesse v.

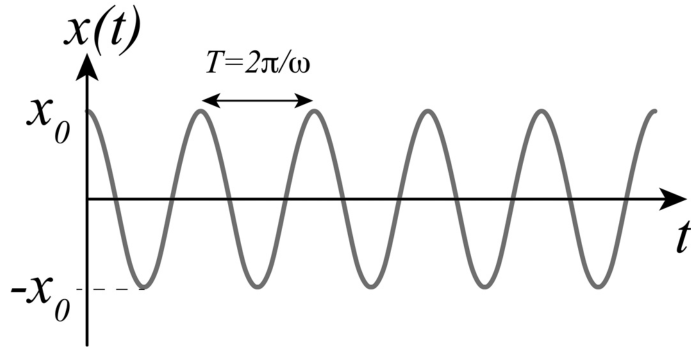

Figure 1.3
Représentation de l'amplitude de l'oscillation harmonique en fonction du temps.

L'origine des temps, t = 0s, a été fixée arbitrairement lors de la résolution de l'équation du mouvement. Dans notre cas, nous avons fixé cette origine à l'instant où la masse est lâchée à $x = x_0$. On peut tout à fait imaginer que cette origine des temps soit fixée à un autre instant.
Par exemple, si on décide que l'origine des temps est prise lorsque la masse passe à la position x = 0, cela va modifier la condition initiale sur la position telle que $x(0)=0$. Dans ce cas, cela signifie qu'il faut que le terme en cosinus soit nul à t = 0. Pour respecter cette nouvelle condition, nous devons ajouter un facteur $\pi/2$ au terme ωt tel que :

$$x(t) = x_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = x_0 \sin(\omega t)$$

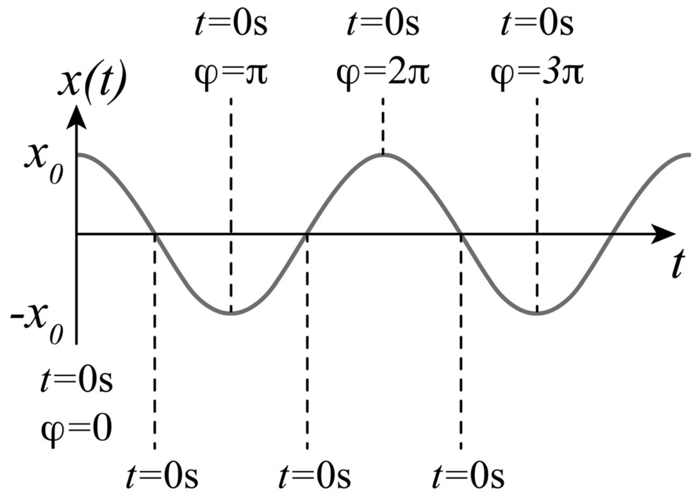

Figure 1.4
Représentation de l'effet de la constante de phase sur l'origine des temps (t = 0 s) dans le cas de l'oscillation harmonique.

D'une manière générale, l'amplitude d'oscillation $x(t)$ peut s'écrire sous la forme suivante :

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

avec φ la constante de phase.
La valeur de φ ne dépend que de la valeur des conditions initiales et a pour unique effet de décaler l'origine des temps par rapport à l'oscillation (figure 1.4).
Le terme $\omega t+\varphi$ est appelé phase de l'oscillation et permet de déterminer l'amplitude de l'oscillation (position de la masse m dans notre cas) à l'instant t.

I.1.2 Oscillation amortie

Dans le cas précédent, il est supposé que la masse ne subit pas de frottement, ce qui implique que le mouvement et l'oscillation se prolongent sur un temps infini. Ceci est évidemment faux si la masse est située dans un milieu quelconque autre que du vide. En effet, l'environnement de la masse peut induire l'application de forces nouvelles qui vont s'opposer au mouvement de l'objet. Ces forces peuvent être des forces de frottement sous l'effet du milieu fluide (gaz ou liquide) dans lequel la masse se déplace, les frottements de la masse avec le support ou encore des interactions à plus longue portée comme des forces électrostatiques si la masse est chargée électriquement. Ainsi, sous l'effet de son environnement et de ces nouvelles forces, l'oscillation va être amortie provoquant une diminution de son amplitude au cours du temps et aboutissant à l'arrêt complet de la masse après un temps fini. Ce phénomène d'amortissement dépendra non seulement des paramètres du milieu environnant (amplitude et nature des forces de frottement et d'interaction), mais également des paramètres du ressort et de la masse.

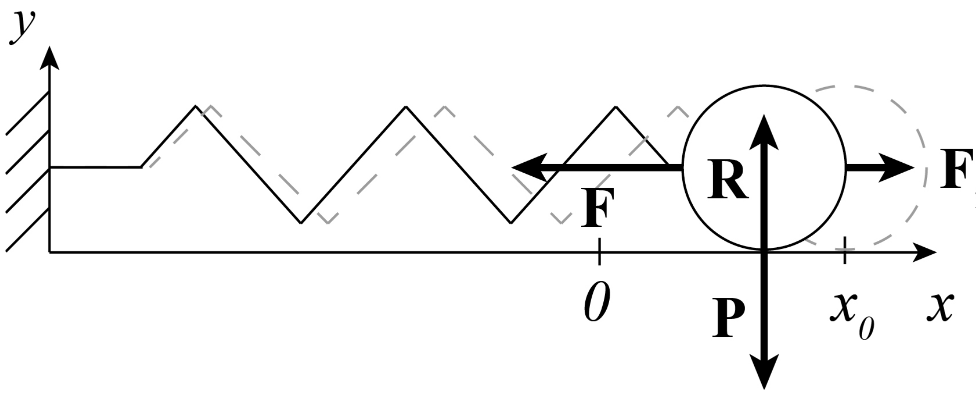

Figure 1.5
Représentation du ressort de constante de raideur, k, et des forces qui s'exercent sur la masse m, dans le cas de l'oscillation amortie avec frottements.

Pour illustrer cela, nous allons introduire dans le problème précédent une force de frottement en milieu fluide. Ce type de frottement apparaît lorsque l'objet est plongé dans un gaz ou un liquide. La force de frottement associée est alors de la forme : $\mathbf{F_f}=-\alpha.\mathbf{v}$, avec α, le coefficient de frottement et $\mathbf{v}$, la vitesse de l'objet. Le coefficient α dépend du fluide et est directement relié à sa viscosité, qui définit la capacité d'un fluide à s'écouler et qui dépend de sa densité. Ainsi, plus un fluide est visqueux, plus la valeur de α est importante et plus la force de frottement est intense (la masse est freinée plus rapidement). Le signe négatif devant α indique que cette force s'oppose à la vitesse et donc au mouvement de l'objet. Elle aura

donc pour effet de freiner le mouvement et de provoquer son arrêt après un temps fini. Cette formule nous indique également que l'intensité de cette force augmente avec la vitesse (plus la vitesse est grande, plus la force est intense et plus le freinage de l'objet est important, avec pour conséquence une réduction du temps d'arrêt).[2]
Etant donné que la masse est maintenant soumise à une force de frottement, quatre forces s'appliquent alors sur la masse (figure 1.5):

La force de rappel, $\mathbf{F}=-k.\mathbf{x}$

Le poids de la masse, $\mathbf{P}=-m.\mathbf{g}$

La réaction du support, $\mathbf{R}=-\mathbf{P}$

La force de frottement, $\mathbf{F_f}=-\alpha.\mathbf{v}$

Comme précédemment, pour déterminer l'équation du mouvement de la masse, on applique le principe fondamental de la dynamique qui relie l'accélération, **a**, de la masse aux forces extérieures qui s'appliquent sur la masse, tel que :

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{R} + \mathbf{P} + \mathbf{F_f}$$

On décompose alors l'accélération et les forces selon les deux directions x et y.

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix},\ \mathbf{F} = -k\,\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -k\,x \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{P} = m\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{R} = -\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ R = mg \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{F_f} = -\alpha.\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -\alpha\, v_x \\ 0 \end{pmatrix}$$

La force de frottement s'opposant au mouvement qui est uniquement dans la direction des x, sa composante selon y est nulle (il n'y a pas de vitesse selon y).
Les composantes de l'accélération sont alors égales à :

$$ma_x = -k\,x - \alpha\, v_x \text{ et } ma_y = R - mg = 0$$

Etant donné que : $a_x = \dfrac{d^2x}{dt^2}$ et $v_x = \dfrac{dx}{dt}$, on en déduit que l'équation du mouvement est :

[2] Deux expériences illustrent bien cette observation. Premièrement, si vous êtes dans une voiture et que vous passez votre main à l'extérieur par la fenêtre, vous ressentez alors une force s'exercer sur votre main. Cette force est d'autant plus importante que la vitesse de la voiture est élevée et plus la voiture accélère, plus vous aurez du mal à tenir votre main vertical. Deuxièmement, dans une piscine, vous avez d'autant plus de mal à avancer que votre vitesse est grande. Les forces de frottements avec l'eau sont d'autant plus intenses que vous essayez d'avancer vite. Ainsi, il est beaucoup plus difficile de courir que de marcher dans l'eau.