Jour n°1

Exercice 1.1

On considère une barre cylindrique d'axe Ox, de longueur L, de rayon a, de coefficient de conductivité thermique λ, comprise entre deux thermostats de température T_1 et T_2 respectivement en $x = 0$ et $x = L$.

L'air extérieur est à la température T_0 et il existe un flux conducto-convectif de coefficient de transfert thermique de surface h entre l'air extérieur et la surface latérale de la barre.

On se place en régime permanent et $T_1 > T_2 > T_0$.

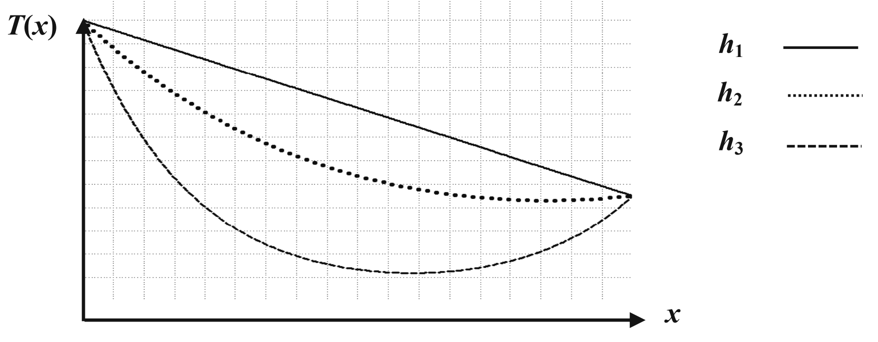
1) En effectuant un bilan thermique sur une tranche du cylindre de longueur dx, compris entre les abscisses x et $x + dx$, déterminer le transfert thermique échangé avec l'air extérieur, que l'on notera δQ_{ext}.

2) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la température de la barre T.

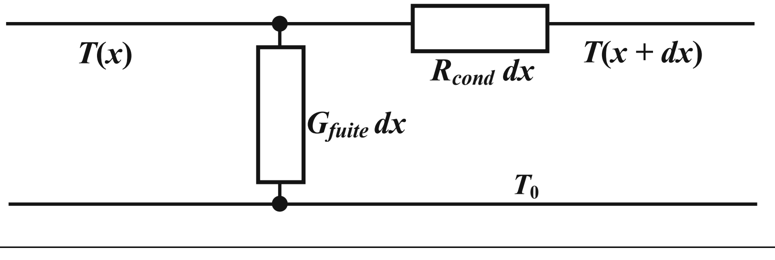
3) Déterminer $T(x)$.

4) On donne ci-dessous les courbes représentatives de la température en fonction de la variable x et correspondant à trois valeurs distinctes du coefficient h.

Interpréter ces trois courbes. Déterminer la valeur de h_1 et ranger h_i par ordre croissant.



5) On donne le schéma équivalent de la barre cylindrique, déterminer R_{cond} et G_{fuite}.



Exercice 1.2

Un satellite est, tout d'abord, acheminé en altitude à l'aide d'une fusée au point S_0.

À l'instant $t = t_0$, on lui communique une vitesse $\vec{v}_0$.

L'angle de lancement est défini par l'angle entre $\vec{v}_0$ et la normale à la droite TL_0. Ici l'angle de lancement est nul. T correspond au centre de la Terre.

1) Quelle est l'énergie potentielle du satellite à l'instant $t = t_0$?

2) Quelles sont les conséquences d'un angle de lancement nul ?

3) Donner la constante des aires.

4) Quelle est l'énergie cinétique à fournir au satellite pour qu'il ait une trajectoire circulaire de rayon r_0 ?

5) Déterminer l'altitude du satellite et sa vitesse pour qu'il soit géostationnaire sachant que la masse de la Terre est égale à 6.10^{24} kg, que son rayon vaut 6400 km et que la constante de gravitation est égale à $6.67\ 10^{-11}$ SI.

Énoncé

On considère une barre cylindrique d'axe Ox, de longueur L, de rayon a, de coefficient de conductivité thermique λ, comprise entre deux thermostats de température T_1 et T_2 respectivement en $x = 0$ et $x = L$.

L'air extérieur est à la température T_0 et il existe un flux conducto-convectif de coefficient de transfert thermique de surface h entre l'air extérieur et la surface latérale de la barre.

On se place en régime permanent et $T_1 > T_2 > T_0$.

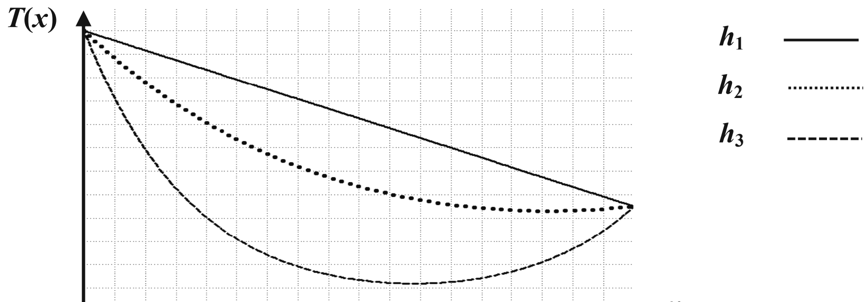
1) En effectuant un bilan thermique sur une tranche du cylindre de longueur dx, compris entre les abscisses x et $x + dx$, déterminer le transfert thermique échangé avec l'air extérieur, que l'on notera δQ_{ext}.

2) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la température de la barre T.

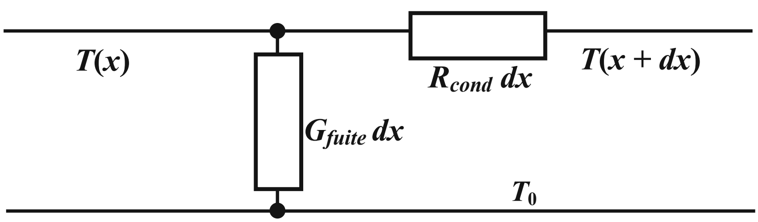
3) Déterminer $T(x)$.

4) On donne ci-dessous les courbes représentatives de la température en fonction de la variable x et correspondant à trois valeurs distinctes du coefficient h.

Interpréter ces trois courbes. Déterminer la valeur de h_1 et ranger h_i par ordre croissant.



5) On donne le schéma équivalent de la barre cylindrique, déterminer R_{cond} et G_{fuite}.



Analyse stratégique de l'énoncé

Il s'agit d'un exercice classique portant sur la diffusion thermique axiale, avec pertes latérales, modélisées par la loi de Newton.

1) Vous devez effectuer un bilan énergétique en régime permanent de fonctionnement, sur un petit volume de contrôle de la barre, compris entre les abscisses x et $x + dx$. Identifiez et exprimez l'énergie thermique qui entre à l'abscisse x, ainsi que les énergies thermiques qui sortent, soit latéralement, soit à l'abscisse $x + dx$ du volume de contrôle.

↪ Attention aux signes, lors de l'utilisation de grandeurs algébriques.

↪ Identifiez la nature du régime permanent.

2) Souvenez-vous de l'énoncé de la loi de Newton concernant l'expression du transfert thermique latéral et appliquez la loi de Fourier.

↪ Attention au signe dans l'application de la loi de Newton et attention à la définition de la surface latérale.

3) Sachez reconnaître une équation différentielle à coefficients constants, sa résolution ne comporte pas de difficulté.

↪ Pensez à introduire les conditions aux limites, afin de déterminer les constantes d'intégration.

4) Cette question ne pose pas de réelle difficulté.

↪ Pensez à ce que donnerait une barre calorifugée.

5) Ce schéma doit vous faire penser à la modélisation d'une ligne télégraphique. L'approche théorique y est identique. Vous utiliserez les analogies entre la conduction électrique et la conduction thermique : courant électrique/flux thermique ; potentiels électriques/températures.

↪ N'oubliez pas la loi de Fourier.

Corrigé

1) Remarquons que les températures extrêmes (T_1 et T_2) étant constantes ainsi que la température extérieure (T_0), le régime permanent de fonctionnement ne peut correspondre qu'à un régime indépendant du temps.

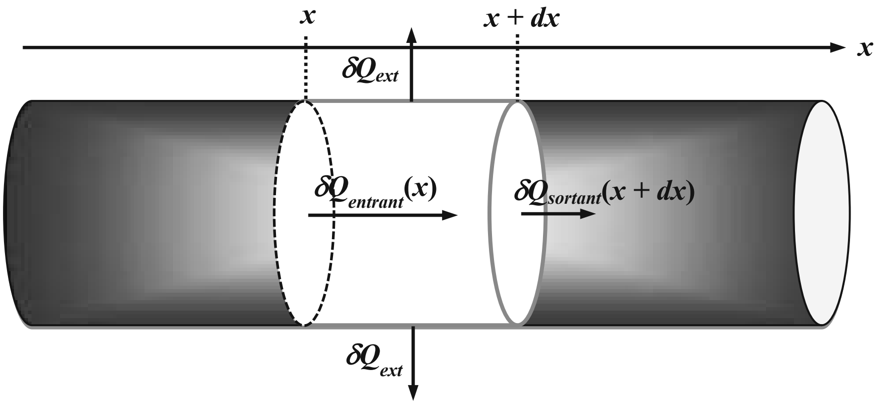
Par ailleurs, la symétrie du problème nous permet d'envisager une évolution de la température selon la seule variable d'espace x.

On pose $T(M,t) = T(x)$ la température du point M de la barre.

En appliquant la loi de Fourier, il vient pour le vecteur densité de courant thermique :

$$\vec{j}_{th} = -\lambda \overrightarrow{grad} T(x) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \overrightarrow{e_x}.$$

Isolons par la pensée une petite portion cylindrique de section $S = \pi a^2$ et de longueur dx et effectuons un bilan énergétique en régime stationnaire.



Soient $\delta Q_{entrant}(x)$, le transfert thermique en entrée, $\delta Q_{sortant}(x + dx)$, le transfert thermique en sortie et δQ_{ext}, le transfert thermique échangé latéralement avec l'air ambiant pendant la durée dt de notre bilan.

Exprimons ces trois grandeurs, sur une durée dt :

$$\delta Q_{entrant}(x) = j_{th}(x)Sdt > 0$$

$$\delta Q_{sortant}(x) = j_{th}(x + dx)Sdt > 0$$

$$\delta Q_{ext}(x) = énergie\ sortant\ latéralement > 0.$$

Dans ces expressions, $j_{th}(x)$, et respectivement $j_{th}(x + dx)$, représentent les densités volumiques de courant thermique aux abscisses x et $x + dx$ et S la section du cylindre.

En régime stationnaire de fonctionnement, l'énergie interne du volume de contrôle, demeure indépendante du temps, par conséquent, l'énergie qui entre pendant la durée dt du bilan, à l'abscisse x, est égale à la somme des énergies qui sortent du volume de contrôle, pendant cette même durée. Soit :

$$\delta Q_{entrant}(x) = \delta Q_{sortant}(x) + \delta Q_{ext}(x)$$

$$\delta Q_{ext}(x) = j_{th}(x)Sdt - j_{th}(x + dx)Sdt$$

$$\boxed{\delta Q_{ext}(x) = -\frac{dj_{th}}{dx}Sdxdt.}$$

2) Appliquons la loi de Fourier, afin d'exprimer, $\frac{dj_{th}}{dx}$:

$$\vec{j}_{th} = -\lambda\overrightarrow{grad}T(x) = -\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\overrightarrow{e_x}.$$

$$\delta Q_{ext}(x) = -\frac{dj_{th}}{dx}Sdxdt = \lambda\frac{d^2T}{dx^2}Sdxdt.$$

Exprimons δQ_{ext}à partir de la loi de Newton :

$$\delta Q_{ext} = hdS_{lat}(T(x) - T_0)dt.$$

Pour mettre le signe positif, on peut remarquer que si la température de la tige est supérieure à la température extérieure, le transfert thermique δQ_{ext} est bien positif.

Remarquons que δQ_{ext}est bien algébriquement positive car la température au sein de la barre est comprise entre T_1 et T_2, toutes deux, supérieures à la température extérieure T_0. Égalisons les deux expressions de δQ_{ext}:

$$\lambda \frac{d^2T}{dx^2} Sdxdt = hdS_{lat}(T(x) - T_0)dt.$$

La surface latérale est égale à la surface du cylindre de rayon a et de longueur dx :

$$dS_{lat} = 2\pi adx.$$

La section du cylindre vaut :

$$S = \pi a^2.$$

En remplaçant et en simplifiant l'équation obtenue :

$$\lambda \frac{d^2T}{dx^2} \pi a^2 dxdt = h2\pi adx(T(x) - T_0)dt$$

$$\lambda \frac{d^2T}{dx^2} a = 2h(T(x) - T_0)$$

$$\frac{d^2T}{dx^2} = \frac{2h(T(x) - T_0)}{\lambda a}.$$

Soit, l'équation différentielle en T suivante :

$$\boxed{(1) \quad \frac{d^2T}{dx^2} - \frac{2h}{\lambda a}(T(x) - T_0) = 0.}$$

3) Posons : $\omega_0^2 = \frac{2h}{\lambda a}$ et $\theta(x) = T(x) - T_0$ dans l'équation (1) :

$$\boxed{(2) \quad \frac{d^2\theta}{dx^2} - \omega_0^2 \theta(x) = 0.}$$

Résolvons cette équation différentielle à coefficients constants du second ordre en θ, avec les conditions aux limites suivantes :

$$T(x = 0) = T_1 \, ; \, T(x = L) = T_2 \, ;$$

$$\theta(x = 0) = T_1 - T_0 \, ; \, \theta(x = L) = T_2 - T_0.$$

L'équation caractéristique associée à l'équation (2) est :

$$r^2 - \omega_0^2 = 0$$

dont les solutions sont $r = \pm \omega_0$, d'où :

$$\theta(x) = \theta_1 ch(\omega_0 x) + \theta_2 sh(\omega_0 x).$$

En appliquant les conditions aux limites, il vient :

$$T_1 - T_0 = \theta_1 \; ; \; T_2 - T_0 = \theta_1 ch(\omega_0 L) + \theta_2 sh(\omega_0 L).$$

Il faut déterminer θ_1 et θ_2 :

$$\theta_1 = T_1 - T_0$$

$$T_2 - T_0 = (T_1 - T_0) ch(\omega_0 L) + \theta_2 sh(\omega_0 L)$$

$$\theta_2 = \frac{T_2 - T_0 - (T_1 - T_0) ch(\omega_0 L)}{sh(\omega_0 L)}.$$

Finalement l'expression de la température en régime stationnaire est :

$$\boxed{T(x) = T_0 + (T_1 - T_0) ch\left(\sqrt{\frac{2h}{\lambda a}} x\right) + \frac{T_2 - T_0 - (T_1 - T_0) ch\left(\sqrt{\frac{2h}{\lambda a}} L\right)}{sh\left(\sqrt{\frac{2h}{\lambda a}} L\right)} sh\left(\sqrt{\frac{2h}{\lambda a}} x\right).}$$

4) Commentons l'allure des courbes.

- Chaque courbe commence à la température T_1 et se termine à la température T_2, les conditions aux limites sont respectées.
- En l'absence de pertes thermiques latérales ($h = 0$), la température vérifie l'équation différentielle : $\frac{d^2T}{dx^2} = 0$, équation qui admet comme solution :

$$\boxed{T(x) = T_1 + (T_2 - T_1)\frac{x}{L}.}$$

Il s'agit de l'équation d'une droite à pente négative. Nous reconnaissons la courbe associée à h_1. En conclusion :

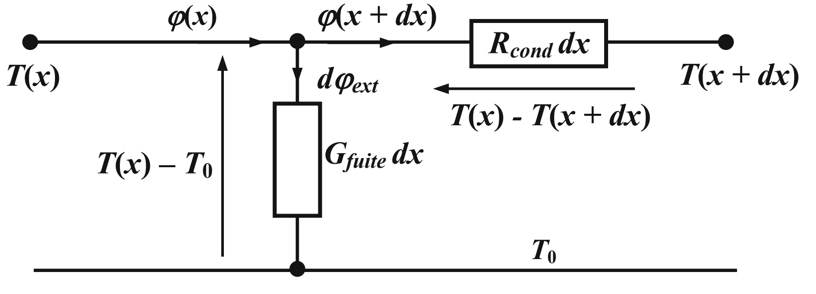
$$\boxed{h_1 = 0.}$$

- Les pertes thermiques latérales expliquent que la température soit toujours, localement, inférieure à la droite précédente. Plus les pertes thermiques sont importantes, plus l'écart est important.

Nous en déduisons que :

$$\boxed{h_3 > h_2 > h_1.}$$

5) Faisons apparaître sur le schéma équivalent les différents flux thermiques



$\varphi(x)$, $\varphi(x + dx)$ et $d\varphi_{ext}$ ainsi que les températures. Nous adoptons les conventions type récepteur.
Appliquons les relations « potentiels-intensités » au circuit thermique proposé :

- (3) $d\varphi_{ext} = G_{fuite} dx(T(x) - T_0)$
- (4) $T(x) - T(x + dx) = R_{cond}\, dx \varphi(x + dx)$, par passage à la limite en faisant tendre *dx* vers zéro, cette relation devient :

$$(5) \quad \varphi = -\frac{1}{R_{cond}} \frac{dT}{dx}.$$

Appliquons les lois de Newton et de Fourier :

- Loi de Newton : (6) $d\varphi_{ext} = h(T(x) - T_0)\, 2\pi a dx.$

- Loi de Fourier : $\vec{j}_{th} = -\lambda \overrightarrow{grad} T(x) = -\lambda \frac{dT}{dx} \overrightarrow{e_x}.$

Or :

$$\varphi(x) = j_{th} \pi a^2$$

$$(7) \quad \varphi(x) = -\lambda \pi a^2 \frac{dT}{dx}.$$

Par identification des équations (3) et (6), puis (5) et (7), nous obtenons :

$$\boxed{G_{fuite} = 2\pi a h}$$

$$\boxed{R_{cond} = \frac{1}{\lambda \pi a^2}.}$$

Donnons les unités de ces deux grandeurs :

$$[G_{fuite}] = [ah] = \mathrm{W.K^{-1}.m^{-1}}.$$

$$[R_{cond}] = \left[\frac{1}{\lambda a^2}\right] = \mathrm{W^{-1}.K.m^{-1}}.$$

Remarquons qu'il était possible d'obtenir les dimensions de G_{fuite} et R_{cond} de façon plus rapide à partir des équations (3) et (4) :

$$G_{fuite} = \frac{1}{(T(x) - T_0)} \frac{d\varphi_{ext}}{dx}$$

$$R_{cond} = -\frac{1}{\varphi} \frac{dT}{dx}.$$