Raphaël, *L'école d'Athènes*, 1511,
(détail : Euclide ou Archimède enseignant)

1. Géométrie

1.1 Je connais mon cours

Coefficient directeur d'une droite :

Équation réduite d'une droite :

Vecteur directeur de $ax+by+c=0$:

Vecteur normal de $ax+by+c=0$:

Condition de parallélisme des vecteurs $\vec{u}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$:

Condition de parallélisme des droites $y=ax+b$ et $y=a'x+b'$:

Condition d'orthogonalité des vecteurs $\vec{u}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$:

Condition d'orthogonalité entre les droites $y=ax+b$ et $y=a'x+b'$:

Norme du vecteur $\vec{u}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$:

Distance entre deux points A et B :

Définitions du produit scalaire et démonstrations ; avec la projection orthogonale :

$\vec{u}.\vec{v}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=$

Avec les cosinus : $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} =$

Analytique :

Formule d'Al-Kashi :

Formule des Sinus :

Équation cartésienne d'une droite :

Méthode à l'aide du vecteur directeur :

Méthode à l'aide du vecteur normal :

Équation d'un cercle :

Centre et rayon du cercle d'équation $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ (quand il existe) :

1.2 ⚠ Exercices de base

1.2.1 Parallélogramme

On se donne les points $A(-2\,;\,7)$, $B(10\,;\,-1)$, $C(0\,;\,-4)$ et $D(-6\,;\,0)$.

1. Les points I, J, K, L sont les milieux des côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.

2. Déterminer la nature des quadrilatères $ABCD$ et $IJKL$.

3. La droite (IK) passe-t-elle par l'origine du repère ?

4. Soit F le point d'intersection des droites (AD) et (BC) : déterminez les coordonnées de F. Montrez que F, K et I sont alignés. Pouvez-vous rajouter un point « simple » sur cette droite ?

1.2.2 Parallélogramme et produit scalaire

$ABCD$ est un parallélogramme tel que $AB = 4$, $AD = 3$ et $AC = 6$.

Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$. En déduire l'angle $\widehat{BAC}$ puis l'angle $\widehat{BAD}$. Quelle est l'aire de $ABCD$?

1.2.3 Coordonnées

Soient les points $A(3\,;1)$, $B(-2\,;-2)$ et $C\left(5\,;\dfrac{1}{2}\right)$; D le quatrième sommet du parallélogramme $ABCD$.

1. Déterminer les coordonnées de D.

2. $ABCD$ est-il un rectangle ?

3. Vérifier l'égalité $2\left(AB^2+BC^2\right)=AC^2+BD^2$.

1.2.4 Droites et rectangle

Soit un rectangle $ABCD$, $AB = 6$ cm, $AD = 4$ cm. M le milieu de $[AB]$, N le milieu de $[CD]$, les droites (DM) et (BN) coupent $[AC]$ en I et J.

1. Montrer que (DM) et (BN) sont parallèles.

2. Montrer que $AI = IJ = JC$.

On prend maintenant le repère $\left(A\,;\vec{i},\vec{j}\right)$ (A en bas à gauche, $\vec{i}$ de longueur 1 cm et colinéaire à $\overrightarrow{AB}$, $\vec{j}$ de longueur 1 cm et colinéaire à $\overrightarrow{AD}$).

3. Déterminer les coordonnées des points A, B, C, D, M et N.

4. En déduire les équations des droites (DM), (BN), (AC). Reprendre alors les questions 1. et 2.

1.2.5 Droites orthogonales

On se donne la droite D ($2x + y = 0$) ainsi que le point $A(4\,;\,-2)$.

1. Déterminer l'équation de la droite Δ orthogonale à D et passant par A.

2. Déterminer les coordonnées du point d'intersection H entre D et Δ.

3. Calculer la distance AH.

1.2.6 Équations de droites

Soient dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ les points de coordonnées $A(1\,;\,2)$, $B(4\,;\,2)$ et $C(6\,;\,0)$.

1. Faire une figure (unité 3 cm) et montrer que $OABC$ est un trapèze.

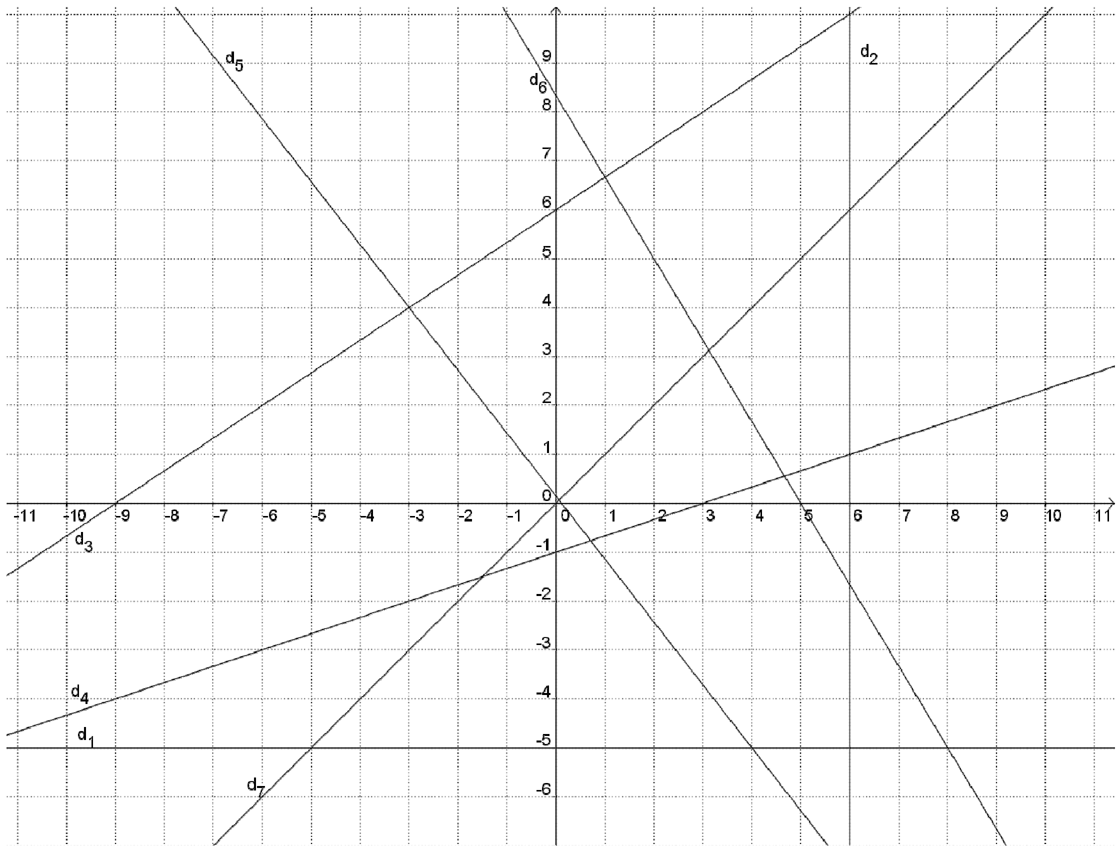
2. Déterminer les équations des diagonales de $OABC$ et les coordonnées de leur point d'intersection D.

3. Déterminer les coordonnées des milieux I et J de $[OC]$ et $[AB]$.

4. Déterminer les coordonnées du point d'intersection E de (OA) et (BC).

5. Montrer que D, E, I, et J sont alignés.

1.2.7 Équations de droites : lecture graphique



1. Donner, sans justification et dans la mesure du possible, un vecteur directeur, l'équation réduite puis l'équation cartésienne des droites ci-dessus.

Droite	Vecteur directeur	Équation réduite	Équation cartésienne
d_1			
d_2			
d_3			
d_4			
d_5			
d_6			
d_7			

2. Donner pour chacune des droites d_k, dans la mesure du possible, les équations de sa perpendiculaire p_k passant par le point $(-8 ; 4)$.

Droite	Vecteur directeur	Équation réduite	Équation cartésienne
p_1			
p_2			
p_3			
p_4			
p_5			
p_6			
p_7			

1.2.8 Équations de droites et intersections

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$ soient le point $A(-2\,;\,1)$ et le vecteur $\vec{u}=\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$. On note d la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

1. Le point O appartient-il à d ? Le point $B(-1\,;\,-1/2)$?

2. Donner une équation de d et la tracer. Quelles sont les coordonnées de ses points d'intersection avec les axes ?

3. C est le point tel que $\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AO}$. Déterminer les coordonnées de C ainsi qu'une équation de la droite (BC). La tracer et déterminer son intersection avec d.

4. Soit d' la droite passant par $D(0\,;\,4)$ et parallèle à d. Donner une équation de d', la tracer et déterminer graphiquement puis par le calcul les coordonnées de son point d'intersection K avec (BC).

5. Soit δ la droite d'équation $x+2y-4=0$. Déterminer son vecteur directeur ainsi que deux de ses points. Tracer δ. Que peut on en dire ? Déterminer ses points d'intersection avec d et d'.

6. Montrer de trois manières différentes que la figure formée par d, d', δ et (BC) est un parallélogramme.

1.2.9 Distances - 1

Soit un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ tel que l'unité soit le centimètre.

1. Soient, dans ce repère, les points $A\left(\frac{7}{2};6\right)$, $B\left(\frac{9}{2};3\right)$ et $C\left(\frac{5}{2};4\right)$. Faire une figure.

2. Quelle est la nature du triangle ABC ?

3. Calculer son aire en centimètres carrés.

4. Déterminer les coordonnées du milieu I du segment [AB].

5. Déterminer une équation cartésienne de la droite (CI).

6. Soit le point D symétrique de C par rapport à I. Quelle est la nature du quadrilatère $ACBD$? Justifier.

1.2.10 Distances - 2

Soit $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé. Soient les points $A\left(\frac{-1}{2};-2\right)$, $B\left(\frac{7}{2};\frac{-7}{2}\right)$ et $C(1\,;2)$.

1. Quelles sont les particularités du triangle ABC ?

2. Trouver les coordonnées du point D tel que $ABDC$ est un carré.

1.2.11 Équations de droites : centre de gravité

Soit un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ du plan et trois points A, B et C définis comme suit : la droite (AB) a pour équation $y = x + 3$; la droite (AC) a pour équation $x + 2y + 6 = 0$; les points B et C ont respectivement pour ordonnées 5 et – 4 ; B' est le milieu de [AC].

1. Tracez les droites (AB) et (AC). Trouvez les coordonnées de A.
2. Déterminez les coordonnées des points B, C et B'.
3. Placez le point G tel que $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ (les vecteurs de construction doivent apparaître). Déterminez ses coordonnées. G appartient-il à la droite (AB') ?

1.2.12 Équations de droites : rectangle

Soit un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ dans lequel on place le carré $OCBA$ où A a pour coordonnées (0 ; 4), B(4 ; 4) et C(4 ; 0).

1. E est le milieu de [BC] et F le point tel que $\overrightarrow{CF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CO}$; déterminer les coordonnées de E et F.
2. Calculer les longueurs AE, AF et FE ; quelle est la nature du triangle AFE ?
3. Soit (d) la droite passant par O et parallèle à (AE) et (d') la droite (BF).

Déterminer une équation de (d) et une équation de (d') ; calculer les coordonnées de leur point d'intersection I. Tracer (d) et (d') et contrôler graphiquement votre résultat.

4. Soit G le point d'ordonnée négative tel que le triangle OFG soit rectangle isocèle de sommet F. Placer G sur la figure ; déterminer les coordonnées de G et prouver que les points A, I et G sont alignés.

1.2.13 Équations de droites : quadrilatère

Dans un repère orthonormé on se donne les points $A(-2\,;\,-3)$, $B(5\,;\,-1)$, $C(-4\,;\,4)$.

On fera la figure et on vérifiera par avance toutes les affirmations du texte et de vos calculs (coordonnées des points, distances, etc.)

1. Trouver les coordonnées du point D tel que $ABDC$ soit un parallélogramme.
2. Vérifier que $ABDC$ est un carré. On précisera la longueur de son côté.
3. Trouver les coordonnées de E le milieu de [AB] et de F le milieu de [DB].
4. Écrire les équations des droites (AF) et (CE) ; trouver les coordonnées de leur point d'intersection H.
5. Montrer que (AF) et (CE) sont perpendiculaires. Quelle est l'aire du quadrilatère $BFHE$?

1.2.14 Équations de droites : Théorème de Pappus

On se donne les points A(0 ; 0), B(1 ; 0), C(3 ; 0) et A'(0 ; 1), B'(1 ; 2), C'(2 ; 3).

On note I le point d'intersection de (AB') et ($A'B$), J celui de (AC') et ($A'C$), K celui de (BC') et ($B'C$).

Montrer que I, J, K sont alignés.

1.2.15 Produit scalaire

Dans le repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ on considère les points A(–1 ; 2), B(0 ; –3) et C(3 ; 1).

Un graphique complet, montrant l'ensemble de l'exercice sera réalisé.

1. a. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.

b. Calculer les longueurs AB, AC et BC.

c. En déduire une valeur approchée au degré près de l'angle $\widehat{ACB}$.

2. Calculer $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$ puis justifier que $\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$ où H est le pied de la hauteur issue de A, dans le triangle ABC.

3. a. Citer un vecteur normal de la hauteur (AH).

b. Déterminer une équation de (AH).

4. a. Déterminer les coordonnées de G, centre de gravité du triangle ABC.

b. G est-il un point de (AH) ?

5. a. Déterminer les coordonnées du point D tel que $ACDB$ soit un parallélogramme.

b. Déterminer l'ensemble des points M du plan $\left\|\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB}\right\| = \frac{1}{2}AD$.

1.2.16 Cercle et tangente 1

Déterminer une équation du cercle de centre $\Omega(2\,;-3)$ et tangent à la droite d'équation $y = x + 1$.

1.2.17 Cercle et tangente 2

Soit Γ un cercle de centre $O(3, 1)$ et de rayon $\sqrt{5}$ et A le point de coordonnées (4 ; 3).

Vérifier que A est un point du cercle et déterminer une équation de la tangente à Γ passant par A.

1.2.18 Cercle et tangente 3

1. Montrer que l'équation $x^2 + y^2 - 5y - 10 = 0$ est celle d'un cercle (C) dont on précisera le centre et le rayon.

2. Calculer les coordonnées des points d'intersection A et B de (C) avec la droite (D) d'équation $x - 2y = 0$.

3. Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) en A ainsi qu'une équation de la tangente (T') à (C) en B.

4. Déterminer l'angle entre (T) et (T').

1.2.19 Équations de cercles

Soit (C) et (C') les cercles d'équations : $x^2 + y^2 + 4x + 2y + 2 = 0$ et $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 2 = 0$. Déterminez les centres et les rayons de ces cercles. Sont-ils sécants ?

1.2.20 Angle inscrit

Soit le repère orthonormal $\left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,\right)$ et les points $A(-15\,;\,-3)$, $B(2\,;\,14)$, $C(-8\,;\,14)$ et $D(10\,;\,2)$.

a. Déterminez une équation du cercle Γ passant par A, B et C.

Vérifiez que D appartient à Γ (on pourra chercher une équation de la forme $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$).

b. Calculez $\cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ et $\sin(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ ainsi que $\cos(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})$ et $\sin(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})$.

Pouvez vous trouver une relation entre ces angles ?

1.2.21 Cercle circonscrit

On considère, dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$, les points $A(1\,;\,-2)$, $B(4\,;\,-1)$ et $C(4\,;\,4)$.

1. a. Déterminer une équation de la médiatrice D_1 du segment [AB].

b. Déterminer une équation de la médiatrice D_2 du segment [BC].

c. Déterminer les coordonnées du point d'intersection I des droites D_1 et D_2 .

d. Que peut-on dire du point I ?

2. Soit le cercle (C) d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - 3x - 3y - 8 = 0$.

a. Déterminer les coordonnées du centre Ω du cercle (C) ainsi que son rayon. Que remarquez-vous ?

b. Montrer que (C) est le cercle circonscrit au triangle ABC.

1.2.22 Lieu

Soit $[AB]$ un segment de longueur 4.

Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 = 16$ (prendre un repère d'origine A où B a pour coordonnées (4 ; 0)).

1.2.23 Cercle inscrit, cercle circonscrit

Soit ABC un triangle, (Γ) le cercle de centre O et de rayon R, circonscrit au triangle ABC et (C) le cercle inscrit dans ABC, de centre I et de rayon r.

On se propose de démontrer que : $OI^2 = R^2 - 2rR$.

On note D le point d'intersection de la droite (AI) avec le cercle (Γ), E le point de (Γ) diamétralement opposé à D et H le projeté orthogonal du point I sur le segment $[AB]$.

1. Exprimer la distance IA en fonction de r et de l'angle $\dfrac{\widehat{A}}{2}$.

2. En utilisant le théorème de l'angle inscrit, montrer que $\widehat{IBD} = \widehat{IDB}$.

3. En déduire que IBD est isocèle en D, puis donner une expression de BD en fonction de R et $\dfrac{\hat{A}}{2}$.

4. Démontrer que $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{ID} = OI^2 - R^2$.

5. Déduire des questions précédentes que $OI^2 = R^2 - 2rR$.

1.3 Trigonométrie

1.3.1 Valeurs à connaître absolument

1. Compléter le tableau suivant

degrés	0°	30°	45°	60°	90°	180°
radians						
cosinus						
sinus						
tangente						
cotangente						

1.3.2 Formules de base à connaître forcément

Compléter les égalités suivantes :

$\cos^2 x + \sin^2 x =$	$1 + \tan^2 x =$
$\cos(\pi - x) =$	$\sin(\pi - x) =$