1. Suites

1.1 Je connais mon cours

Raisonnement par récurrence

On souhaite prouver une propriété $P(n)$ dépendant d'un entier n ; on prouve tout d'abord $P(n_0)$ pour un entier n_0 quelconque (souvent 0 ou 1) puis on prouve que si on a $P(n)$ alors on a $P(n+1)$. Voir l'exemple suivant.

Démontrer que $(1+t)^n \geq 1+nt$ pour tout n entier lorsque $t \in \mathbb{R}^+$.

La propriété $P(n)$ est ici $(1+t)^n \geq 1+nt$: pour $n_0 = 0$, $P(0):(1+t)^0 \geq 1+0\times t \Leftrightarrow 1 \geq 1$ est vraie.

Supposons donc que nous avons $(1+t)^n \geq 1+nt$; la signification de $P(n+1)$ est $(1+t)^{n+1} \geq 1+(n+1)t$;

or on a $(1+t)^{n+1} = (1+t)^n(1+t) \geq (1+nt)(1+t) = 1+nt+t+nt^2 = 1+(n+1)t+nt^2 \geq 1+(n+1)t$.

Puisque évidemment $nt^2 \geq 0$, la propriété est bien vraie.

Limite infinie d'une suite

Une suite (u_n) tend vers une valeur infinie quand n tend vers $+\infty$ si pour tout nombre réel positif A, à partir d'un certain rang N, u_n devient plus grand que A.

En général le calcul se fait directement en remplaçant n par $+\infty$ dans (u_n) mais ce n'est pas toujours possible ; dans ce cas on cherchera une suite v_n dont on est sûr qu'elle tend vers $+\infty$ et telle que $u_n \geq v_n$ pour tout entier $n > N$.

Pour une suite (u_n) croissante dont la limite est $+\infty$, déterminer la première valeur N de n pour laquelle $u_n > A$, A donné.	Données : A, u_{n0}, n_0 initial.
	$n_0 \to N$, $u_{n0} \to u_N$; Tant que $u_N \leq A$ faire Calcul de u_N Si $u_N \leq A$ faire $N+1 \to N$ Fin si Fin tant que
	Sortie : N, u_N.

Théorème des gendarmes pour les suites

On suppose que pour tout n à partir d'un certain rang N, on a trois suites (u_n), (v_n), (w_n) telles que $v_n \le u_n \le w_n$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n \le \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \le \lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.

Démontrer que si (u_n) et (v_n) sont telles que $u_n \le v_n$ à partir d'un certain rang et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.	Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors pour tout réel $A>0$, il existe un rang N à partir duquel $u_n \ge A$, mais alors, comme $u_n \le v_n$, on a $A \le v_n$ à partir de N et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
Démontrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$, L fini et u_n est croissante, alors $u_n \le L$ pour tout n entier.	Supposons que cela soit faux et qu'il existe au moins un N pour lequel on a $u_N > L$, alors, comme u_n est croissante, tous les termes après u_N sont supérieurs à L et la suite ne tend plus vers L…

Rappels de 1e S : suites arithmétiques

1er terme u_0 ; $u_{n+1} = u_n + a$ d'où $u_n = u_0 + na$ ou $u_n = u_p + (n-p)a$.

Sens de variation : si $a > 0$, croissante ; si $a < 0$, décroissante.

Limites : toutes les suites arithmétiques divergent vers $+\infty$ ou $-\infty$.

Méthode de calcul de la somme des n premiers nombres entiers : $S = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$.	On écrit la somme dans les deux sens puis on ajoute terme à terme : $S = 1 + 2 + \ldots + n-1 + n$ $S = n + n-1 + \ldots + 2 + 1$ $2S = n(n+1)$, soit $S = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Quand on connaît la formule, on peut la démontrer par récurrence.

Somme des termes d'une suite arithmétique :

$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = u_0 + u_0 + a + \ldots + u_0 + na = (n+1)u_0 + (1+2+\ldots+n)a$, soit

$$S_n = (n+1)\left(\frac{u_0 + u_0 + na}{2}\right) = (n+1)\left(\frac{u_0 + u_n}{2}\right),$$

ce que l'on résume avec $S_n = \dfrac{\text{(nbre de termes)(1°terme+dernier terme)}}{2}$.

Rappels de 1e S : suites géométriques

1er terme u_0 ; $u_{n+1} = qu_n$; $u_n = u_0 q^n$ ou $u_n = u_p q^{n-p}$. Sens de variation : si $u_0 > 0$, u_n est croissante si $q > 1$, décroissante si $0 < q < 1$, stationnaire si $q = 1$. Dans le cas où $q < 0$, u_n oscille en permanence.

Limites : converge vers 0 si $|q| < 1$; si $|q| > 1$, tend vers $\pm\infty$ suivant les cas. Démonstrations en utilisant l'inégalité $(1+t)^n \ge 1 + nt$.

Méthode de calcul de la somme $S = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-1} + q^n$: on multiplie des deux côtés par $1 - q$, ce qui donne $S(1-q) = 1 - q^{n+1}$, soit $S = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$. Quand on connaît la formule, on peut la démontrer par récurrence.

Somme des termes d'une suite géométrique ; même démarche :

$$S_n = u_0 + u_0 q + \ldots + u_0 q^n = u_0\left(1 + q + q^2 + \ldots + q^n\right) = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Si $q = 1$, $S_n = u_0(n+1)$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ lorsque (u_n) est géométrique de raison q telle que $|q| < 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$ si $q > 1$.

On utilise l'inégalité $(1+t)^n \geq 1 + nt$: lorsque $t > 0$ (donc $1 + t = q > 1$) et n tend vers $+\infty$, $1 + nt$ tend vers $+\infty$ d'où $(1+t)^n$ tend vers $+\infty$.

En passant à l'inverse, on a $0 < \dfrac{1}{q^n} = \dfrac{1}{(1+t)^n} < \dfrac{1}{1+nt} \to 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ lorsque $q < 1$.

On tient des raisonnements semblables lorsque $t < 0$. Lorsque $|q| < 1$, $S_n = u_0 \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \to u_0 \dfrac{1}{1 - q}$.

Théorème des suites monotones (admis)

Toute suite monotone croissante et majorée converge ; toute suite monotone décroissante minorée converge.

Dans le cas où la suite considérée est définie par une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction continue, alors (u_n) converge vers α solution de l'équation $\alpha = f(\alpha)$.

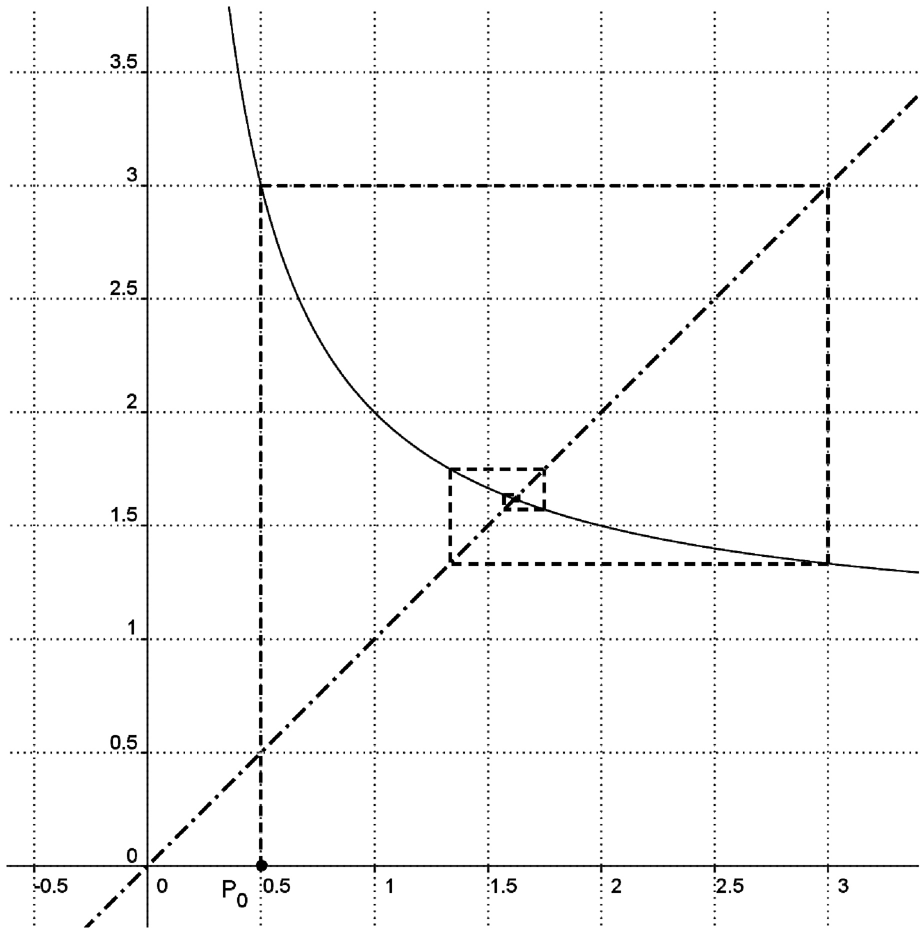
Une suite (u_n) croissante et non majorée a pour limite $+\infty$: soit A un réel strictement positif ; puisque (u_n) n'est pas majorée, il existe un entier n_0 tel que $u_{n_0} > A$, or (u_n) est croissante donc pour tout $n \geq n_0$, $u_n > u_{n_0} > A$; comme on peut dire la même chose pour n'importe quel A, (u_n) tend vers $+\infty$.

On montre de manière semblable qu'une suite (u_n) décroissante et non minorée a pour limite $-\infty$.

<table>
<tr><td rowspan="3">Pour une suite récurrente du type $u_{n+1} = f(u_n)$, donner la valeur de n_0 à partir de laquelle la distance entre deux termes consécutifs devient inférieure à une précision P donnée ; l'algorithme donnera alors les valeurs de n_0 et de la limite L.</td><td>Données : f, u_0, P (la précision cherchée), $N_{\max}$ (le nombre maximum d'itérations pour le cas où la suite ne convergerait pas).</td></tr>
<tr><td>$n_0 \to N$, $u_{n_0} \to u_N$, $f(X) \to Y$
Tant que $|Y - X| > P$ et $N < N_{\max}$ faire
$Y \to X$
$f(X) \to Y$
$N + 1 \to N$
Fin tant que</td></tr>
<tr><td>Sortie : N, Y.</td></tr>
</table>

Représentation graphique d'une suite de la forme $u_{n+1} = f\left(u_n\right)$ dont on connaît le premier terme u_0 et interprétation.

Exemple : $f\left(x\right) = 1 + \dfrac{1}{x}$; u_0=0,5.



Instructions GeoGebra (ligne de saisie) Les ■ sont là pour séparer les instructions (ne pas saisir)	f(x)=1+1/x ■ n=20 ■ u_0=0.5 ■ y=x ■ U=ItérationListe[f(x),u_0,n] ■ P=Séquence[Segment[(Elément[U,k],Elément[U,k+1]), (Elément[U,k],Elément[U,k])],k,1,n] ■ Q=Séquence[Segment[(Elément[U,k],Elément[U,k+1]), (Elément[U,k+1],Elément[U,k+1])],k,1,n] ■ P_0=(u_0,0) ■ Q_0=Segment[P_0,(u_0,u_0)] ■

1.2 ⚠ Exercices de base

1.2.1 Somme des cubes

Démontrer que $1^3+2^3+\ldots+n^3=\dfrac{n^2\left(n+1\right)^2}{4}$.

1.2.2 Raisonnements par récurrence

1. On note $1\times2\times3\times\ldots\ldots\times n=n!$ (ce qu'on lit « factorielle » n).

Démontrez par récurrence que, pour tout entier naturel $n\geq1$, on a : $n!\geq 2^{n-1}$.

2. Soit $\left(u_n\right)$ la suite définie par $u_n=\dfrac{2^n}{n!}$. Montrez qu'à partir d'un rang n_0 la suite u_n est inférieure à une suite géométrique simple. Déduisez-en la limite de $\left(u_n\right)$.

1.2.3 Raisonnements par récurrence sur des sommes

1. Montrer que pour tout entier n différent de 1, on a $\dfrac{1}{1\times2}+\dfrac{1}{2\times3}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}=1-\dfrac{1}{n+1}$.

2. Montrer par récurrence que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\left(k+1\right)\left(k+2\right)=\frac{n\left(n+1\right)\left(n+2\right)\left(n+3\right)}{4}$.

3. On cherche à généraliser le résultat précédent : p désigne un entier supérieur à 1 et on définit la somme :

$$S\left(n,p\right)=1\times2\times\ldots\times p+2\times3\times\ldots\times\left(p+1\right)+3\times4\times\ldots\times\left(p+2\right)+\ldots+n\times\left(n+1\right)\times\ldots\times\left(n+p-1\right).$$

Montrer par récurrence **sur *n*** (p est supposé fixé) que $S\left(n,p\right)=\dfrac{n\left(n+1\right)\left(n+2\right)\ldots\left(n+p\right)}{p+1}$.

1.2.4 Y'a d'la pression…

STL France métropolitaine 2006, 5 points

Au niveau de la mer (altitude 0), la pression atmosphérique est 1 013 hectopascal.

Dans cet exercice, on admet que la pression atmosphérique diminue de 1,25 % à chaque élévation de 100 m.

Pour tout entier naturel n, on note P_n la pression, exprimée en hectopascal, à l'altitude $100n$, exprimée en mètres. Soit $\left(P_n\right)$ la suite numérique des valeurs prises par cette pression atmosphérique.

1. Calculer les pressions P_1 et P_2, arrondies à l'unité, aux altitudes 100 et 200.

2. a. Exprimer P_{n+1} en fonction de P_n.

b. En déduire la nature de la suite $\left(P_n\right)$. Préciser sa raison et son premier terme.

c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $P_n=1\,013\times0,9875^n$.

3. Calculer la pression atmosphérique, arrondie à l'unité, à l'altitude 3 200.

4. Calculer à partir de quelle altitude, à 100 m près, la pression atmosphérique devient inférieure à 600 hectopascal.

1.2.5 Récurrence sur une parabole

S, Pondichéry 2003

On considère la suite $\left(u_n\right)$ définie par $\begin{cases}u_0=a\\u_{n+1}=u_n\left(2-u_n\right)\end{cases}$ où a est un réel donné avec $0<a<1$.

1. On suppose que $a=\frac{1}{8}$.

a. Calculer u_1 et u_2.

b. Tracer dans un repère orthonormal la courbe représentative $\mathcal{P}$ de la fonction f : $f(x)=x(2-x)$ ainsi que la droite $\mathcal{D}$ ($y = x$).

c. Utiliser $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ pour construire sur l'axe des abscisses les points A_1, A_2, A_3 d'abscisses respectives u_1, u_2, u_3.

2. On suppose dans cette question que a est quelconque ($0 < a < 1$).

a. Montrer par récurrence que $0<u_n<1$.

b. Montrer que u_n est croissante. Que peut-on en déduire ?

3. On suppose de nouveau $a=\frac{1}{8}$ et on considère la suite $v_n=1-u_n$.

a. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n. En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

b. Déterminer la limite de v_n puis celle de u_n.

1.2.6 Récurrence sur une hyperbole

Soit I l'intervalle $[0;1]$. On considère la fonction f définie sur I par $f(x)=\frac{3x+2}{x+4}$.

1. Étudier les variations de f et en déduire que, pour tout x élément de I, $f(x)$ appartient à I.

2. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1}=f(u_n)=\frac{3u_n+2}{u_n+4}$. Montrer que, pour tout n entier, u_n appartient à I.

On se propose d'étudier la suite (u_n) par deux méthodes différentes.

Première méthode

3. a. Représenter graphiquement f dans un repère orthonormal d'unité graphique 10 cm.

b. En utilisant le graphique précédent, placer les points A_0, A_1, A_2 et A_3 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_0, u_1, u_2 et u_3.

Que suggère le graphique concernant le sens de variation de (u_n) et sa convergence ?

c. Établir la relation $u_{n+1}-u_n=\frac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$ et en déduire le sens de variation de la suite (u_n).

d. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

e. Justifier que la limite L de la suite (u_n) vérifie $L=f(L)$ et calculer L.

Deuxième méthode : on considère la suite (v_n) définie par $v_n=\frac{u_n-1}{u_n+2}$.

4. a. Prouver que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$.

b. Calculer v_0 et exprimer v_n en fonction de n.

c. Exprimer u_n en fonction de v_n, puis en fonction de n.

d. En déduire la convergence de la suite (u_n) et sa limite l.

1.2.7 Somme des termes d'une suite récurrente

S, Antilles, septembre 2008, 4 points

Certains résultats de la partie A pourront être utilisés dans la partie B, mais les deux parties peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Partie A

On définit :

– la suite (u_n) par : $u_0 = 13$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}$.

– la suite (S_n) par : pour tout entier naturel n, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$. En déduire la limite de la suite (u_n).

2. a. Déterminer le sens de variation de la suite (S_n).

b. Calculer S_n en fonction de n.

c. Déterminer la limite de la suite (S_n).

Partie B

Étant donné une suite (x_n), de nombres réels, définie pour tout entier naturel n, on considère la suite (S_n) définie par $S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$.

Indiquer pour chaque proposition suivante si elle est vraie ou fausse. Justifier dans chaque cas.

Proposition 1 : si la suite (x_n) est convergente, alors la suite (S_n) l'est aussi.

Proposition 2 : les suites (x_n) et (S_n) ont le même sens de variation.

1.3 Exercices intermédiaires

1.3.1 Nombres de Fermat

1. Pour tout entier naturel n, on note $F_n = 2^{\left(2^n\right)} + 1$. Calculer F_0, F_1, F_2, F_3.

2. Démontrer par récurrence que pour tout $n > 1$, on a $F_0 \times F_1 \times F_2 \ldots \times F_n = F_{n+1} - 2$.

3. Montrer que la suite (F_n) est croissante et non majorée. Quelle est sa limite ?

1.3.2 Somme de termes

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 0$, on a $3^n \geq n^2(n-1)$.

2. On définit, pour $n \geq 1$, la suite (u_n) par $u_n = \frac{1}{3^1} + \frac{2}{3^2} + \ldots + \frac{n}{3^n}$.

a. Quel est le sens de variation de (u_n) ?

b. Montrer par récurrence que pour tout entier $k \geq 1$, $k - \left(\frac{3}{2}\right)^k \leq 0$.

En déduire que, pour tout $k \geq 1$, $\frac{k}{3^k} \leq \frac{1}{2^k}$ puis un majorant de u_n. Que peut-on en conclure pour (u_n) ?

3. On définit pour $n \geq 1$ la suite (v_n) par $v_n = u_n + \frac{1}{n}$. En utilisant la question 1), montrer que (v_n) est décroissante. Quelle est la limite de $(v_n - u_n)$? Que peut-on en conclure pour (v_n) ?

1.3.3 Les lettres de Gaston

On définit la suite (u_n) par $u_0 = 2000$ et $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 200$.

1. Dans un repère de votre choix, représenter les droites d'équation respectives $y = x$ et $y = \frac{3}{4}x + 200$, puis les premiers termes de la suite (u_n).

2. On pose, pour tout n, $v_n = u_n - 800$. Montrer que la suite (v_n) est géométrique ; en déduire l'expression de u_n en fonction de n et la limite de (u_n). Au bout de combien de temps a-t-on $u_n < 810$?

Mur peint Gaston Lagaffe, d'après A. Franquin
réal. G. Oreopoulos G. et D. Vandegeerde
photo Ferran Cornellà

3. Gaston L., garçon de bureau aux éditions Dupuis, se plaint à sa dulcinée :
– « Voyez-vous, m'oiselle Jeanne, tous les jours je sais traiter le quart de mon courrier en retard, mais il m'arrive 200 lettres de plus chaque matin !
– Monsieur Gaston, vous arriverez bien à trouver une solution, vous êtes si intelligent… »
Oui, mais quelle solution, sachant qu'hier soir il y avait 2000 lettres sur le bureau de notre héros ?

4. La question a. est indépendante de ce qui précède.

a. Si (x_n) est une suite croissante, on définit (y_n) par $y_n = \frac{x_0 + x_1 ... + x_n}{n+1}$.

Montrer que (y_n) est croissante et que pour tout n, on a $y_n \leq x_n$.

Que peut-on dire pour une suite (x_n) décroissante (on ne justifiera pas ses affirmations).

b. On appelle M_n la quantité de lettres qu'il y a eu **en moyenne** sur le bureau de Gaston pendant les n premiers jours (en comptant comme jour 0 le soir où il y avait 2000 lettres).
Exprimer M_n en fonction de n.

Quel est le sens de variation de (M_n) ? La suite (M_n) est-elle convergente ?

1.3.4 À l'hôpital

On administre à un patient un médicament par injection intraveineuse. La quantité de médicament dans le sang diminue en fonction du temps.

Le but de l'exercice est d'étudier pour différentes hypothèses, l'évolution de cette quantité minute par minute.

1. Injection unique

On effectue à l'instant 0 une injection de 10 ml de médicament. On estime que 20 % du médicament est éliminé par minute. On note u_n la quantité de médicament restant dans le sang à la minute n.

a. Quelle est la nature de la suite u_n ? Quel est son sens de variation ? Quelle est sa limite ?