Chapitre 1

Rappels et outils de base

1.1 Espaces topologiques

On rappelle ici quelques notions sur les espaces topologiques utilisées dans ce livre. Le lecteur intéressé pourra, par exemple, consulter les références [64, 149] ou [169].

Définition 1.1.1 *On appelle espace topologique un couple $(X, \mathcal{T})$ où X est un ensemble et $\mathcal{T}$ est une famille de sous-ensembles de X, appelés ouverts, vérifiant :*

(O1) *toute réunion d'ouverts est un ouvert ;*

(O2) *toute intersection finie d'ouverts est un ouvert ;*

(O3) *X et $\emptyset$ sont des ouverts.*

En d'autres termes, une famille $\mathcal{T}$ de parties de X est une topologie sur X si elle est stable par union quelconque, intersection finie et contenant X et $\emptyset$.

Définition 1.1.2 *Soit A un sous-ensemble d'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$. On dit que A est un fermé ou partie fermée de X si le complémentaire de A dans X est ouvert, c'est-à-dire si l'on a $A^c = C_X A \in \mathcal{T}$.*

La famille $\mathcal{F}$ des fermés d'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ vérifie les propriétés suivantes, appelées axiomes des fermés.

(F1) toute réunion finie de fermés est un fermé ;

(F2) toute intersection de fermés est un fermé ;

(F3) $\emptyset$ et X sont fermés.

Définition 1.1.3 *Soient $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ deux topologies sur un ensemble X. On dit que $\mathcal{T}_2$ est plus fine que $\mathcal{T}_1$ (ou bien que $\mathcal{T}_1$ est moins fine que $\mathcal{T}_2$) et on note $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ si l'application identité $I : (X, \mathcal{T}_2) \longrightarrow (X, \mathcal{T}_1)$ est continue. De plus, si $\mathcal{T}_1 \subsetneq \mathcal{T}_2$, on dit que $\mathcal{T}_2$ est strictement plus fine que $\mathcal{T}_1$ (ou bien que $\mathcal{T}_1$ est strictement moins fine que $\mathcal{T}_2$).*

La relation binaire $\subseteq$ définit une relation d'ordre partiel sur l'ensemble de toutes les topologies possibles sur X.

Soient $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ deux topologies sur un ensemble X. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$;
- pour tout $x \in X$, tout voisinage de x pour $\mathcal{T}_1$ est un voisinage de x pour $\mathcal{T}_2$;
- pour toute partie A de X, l'adhérence de A pour $\mathcal{T}_2$ est contenue dans l'adhérence de A pour $\mathcal{T}_1$;
- toute partie de X fermée pour $\mathcal{T}_1$ est fermée pour $\mathcal{T}_2$.

Bases d'ouverts

Définition 1.1.4 *Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$. On dit que $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts de X ou base de la topologie $\mathcal{T}$ si tout ouvert non vide de X est réunions d'ouverts appartenant à $\mathcal{B}$.*

Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(a) $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts de X ;

(b) pour tout $U \in \mathcal{T}$ et tout $x \in U$, il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B \subseteq U$.

Voisinages, bases de voisinages

Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et x un point de X. On appelle voisinage de x toute partie V de X contenant un ouvert U contenant x, c'est-à-dire $\{x\} \subseteq U \subseteq V$. On note l'ensemble des voisinages de x, $\mathcal{V}(x)$. Plus généralement, soit A une partie de X, on appelle voisinage de A toute partie V de X telle qu'il existe un ouvert U vérifiant $A \subseteq U \subseteq V$.

Pour tout $x \in X$, la famille $\mathcal{V}(x)$ de sous-ensembles de X vérifie les propriétés suivantes

(**V1**) pour tout $x \in X$, $\mathcal{V}(x) \neq \emptyset$ et pour tout $V \in \mathcal{V}(x)$, on a $x \in V$;
(**V2**) toute partie de X qui contient un élément de $\mathcal{V}(x)$ appartient à $\mathcal{V}(x)$;
(**V3**) l'intersection de deux éléments de $\mathcal{V}(x)$ est élément de $\mathcal{V}(x)$;
(**V4**) pour tout $x \in X$ et tout $V \in \mathcal{V}(x)$, il existe $W \in \mathcal{V}(x)$ tel que, pour tout $y \in W$, on ait $V \in \mathcal{V}(y)$.

Définition 1.1.5 *Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et x un point de X. On appelle base de voisinages de x toute famille $\mathcal{B}(x)$ de voisinages de x telle que, pour tout voisinage V de x, il existe $W \in \mathcal{B}(x)$ tel que $W \subseteq V$.*

Le résultat suivant donne une connection entre les bases d'ouverts et les bases de voisinages.

Proposition 1.1.1 *Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts ;
(b) Pour tout $x \in X$, la famille $\{U \in \mathcal{B} \ : \ x \in U\}$ est une base de voisinages de x.

Intérieur, adhérence, frontière

Définition 1.1.6 *Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique, $x \in X$ et A un sous-ensemble quelconque de X.*

(a) On dit que x est un point intérieur à A si $A \in \mathcal{V}(x)$. L'ensemble de tous les points intérieurs à A s'appelle l'intérieur de A et se note $\mathring{A}$. C'est le plus grand ouvert de X contenu dans A.
(b) On dit que x est adhérent à A lorsque tout voisinage de x intersecte A. L'ensemble des points adhérents à A s'appelle l'adhérence de A et se note $\overline{A}$. C'est le plus petit fermé de X contenant A.
(c) On dit que x est un point frontière de A si $x \in A$ et $x \in \overline{A^c}$. L'ensemble des points frontière de A s'appelle la frontière de A et se note ∂A. En fait, on a $\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c} = \overline{A} \backslash \mathring{A}$.
(d) On dit que x est un point d'accumulation de A si tout voisinage de x contient un point de A distinct de x.
(e) On dit que $a \in A$ est un point isolé dans A s'il existe un voisinage V de a tel que $V \cap A = \{a\}$.

La notation $C \backslash D$ désigne la différence des ensembles C et D. Plus pécisément, on a

$$C \backslash D := \Big\{x \in C \ : \ x \notin D\Big\}.$$

Sous-ensembles denses

Définition 1.1.7 *Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et A un sous-ensemble de X. On dit que A est dense dans X si $\overline{A} = X$.*

En d'autres termes, le sous-ensemble A est dense dans X si et seulement si il intersecte tous les ouverts de X.

Proposition 1.1.2 *Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique, $\mathcal{B}$ une base d'ouverts de X et A un sous-ensemble de X. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(a) A est dense dans X.

(b) Pour tout ouvert non vide U de X, on a $A \cap U \neq \emptyset$.

(c) Pour tout $B \in \mathcal{B}$ tel que $B \neq \emptyset$, on a $A \cap B \neq \emptyset$.

Espaces séparables

Lorsqu'un ensemble est fini, c'est-à-dire ses éléments peuvent être listés par une suite finie, son cardinal est la longueur de cette suite, autrement dit il s'agit du nombre d'éléments de l'ensemble. Les choses deviennent plus compliquées dès que l'on passe en cardinalité infinie.

Définition 1.1.8 *Un ensemble E est dit dénombrable s'il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$.*

Avec cette définition un ensemble de cardinal n est dénombrable puisqu'il est en bijection avec $\{0, 1, \cdots, n-1\}$. Parfois, la définition de dénombrable sous-entend que l'ensemble est de cardinal infini.

Définition 1.1.9 *On dit qu'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est séparable s'il admet un sous-ensemble dénombrable et dense.*

Il est clair que tout sous-ensemble d'un espace séparable est séparable.

Espaces topologiques séparés

Définition 1.1.10 *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. On dit que X est séparé, si pour tous $x, y \in X$ distincts, il existe V_x voisinage de x et V_y voisinage de y tels que $V_x \cap V_y = \emptyset$.*

On note la topologie d'un espace topologique séparé a suffisamment d'ouverts pour distinguer les points de X. Ainsi, pour tout $x \in X$, le singleton $\{x\}$ est fermé.

Continuité et limites d'applications

Soient $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{T}')$ deux espaces topologiques et $f : X \to Y$ une application. On dit que f est continue en un point $x \in X$ si l'image réciproque par f de tout voisinage de $f(x)$ est un voisinage de x, c'est-à-dire $f^{-1}(\mathcal{V}(f(x)) \subseteq \mathcal{V}(x)$. L'application f est dite continue sur X si elle est continue en tout point de X.

Une bijection $f : X \to Y$ continue, ainsi que sa bijection réciproque, est appelée un homéomorpdisme. On dit que X et Y sont homéomorphes, s'il existe un homéomorphisme de X sur Y.

On note que si X est un espace séparé homéomorphe à Y, alors Y est aussi séparé.

Soient $(X, \mathcal{T})$ et $(Y, \mathcal{T}')$ deux espaces topologiques, A un sous-ensemble quelconque de X, f une application de X dans Y et a un point adhérent à A. On dit que $l \in Y$ est limite de f en a, ou que $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers a, si pour tout voisinage V de l, il existe un voisinage W de a tel que $f(W \cap A) \subseteq V$.

Normalité

Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique séparé. On dit que $(X, \mathcal{T})$ est normal si deux fermés disjoints peuvent être séparés par deux ouverts disjoints. En d'autres termes, si F_1 et F_2 sont deux fermés de X, alors on a

$$F_1 \cap F_2 = \emptyset \implies \exists O_1,\, O_2 \in \mathcal{T}\,; F_1 \subset O_1, \quad F_2 \subset O_2, \quad O_1 \cap O_2 = \emptyset.$$

Théorème 1.1.1 (Uryshon) *Soit X un espace topologique normal. Si A et B sont deux fermés disjoints de X, alors il existe une fonction continue $f : X \to [0,1]$ valant 0 sur A et 1 sur B.*

Théorème 1.1.2 (Tietze) *Soient X un espace topologique normal, A une partie fermée de X et $[a,b]$ un compact de $\mathbb{R}$. Une application continue $f : A \to [a,b]$ peut-être prolongée en une application $F : X \to [a,b]$ continue telle que $F(x) = f(x)$ pour $x \in A$ et $\sup\limits_{x \in X} |F(x)| = \sup\limits_{x \in A} |f(x)|$.*

Limite, valeur d'adhérence d'une suite

Soient $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ et l un point de X.

- On dit que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l ou que l est limite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si

$$(\forall V \in \mathcal{V}(l)) \quad (\exists n_0 \in \mathbb{N}) \quad (\forall n \geq n_0) \; : \; x_n \in V.$$

- On dit que l est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si, tout voisinage V de l, l'ensemble $\{x_n \; : \; n \in \mathbb{N}\} \cap V$ est infini.

1.2 Espaces métriques

1.2.1 Généralités

Soit X un ensemble. Une application $d : X \times X \to [0, +\infty[$ est dite une distance (ou métrique) sur X si les propriétés suivantes sont vérifiées

(i) $\forall x, y \in X,\ d(x, y) = 0$ si, et seulement si, $x = y$ (propriété de séparation) ;

(ii) $\forall x, y \in X,\ d(x, y) = d(y, x)$ (propriété de symétrie) ;

(iii) $\forall x, y, z \in X,\ d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire).

Pour tous $x, y \in X$, le nombre $d(x, y)$ est appelé la distance des éléments x et y. Un ensemble X muni d'une distance d est appelé un espace métrique, on le note (X, d).

Soit (X, d) un espace métrique. On définit les boules ouvertes et les boules fermées de centre x et de rayon $r > 0$ comme les parties suivantes de X :

$$B(x, r) = \{y \in X \ : \ d(x, y) < r\}, \quad B_f(x, r) = \{y \in X \ : \ d(x, y) \leq r\}.$$

On appelle sphère de centre x et de rayon r, l'ensemble

$$S(x, r) = \{y \in X \ : \ d(x, y) = r\}.$$

Soient (X, d) un espace métrique, a un point de X et A une partie non vide de X. Le réel

$$d(a, A) := \inf \{d(a, x) \ : \ x \in A\}$$

est appelé la distance de a à A. On appelle le diamètre de la partie A le nombre

$$\mathrm{diam}(A) := \sup \{d(x, y) \ : \ x, y \in A\}.$$

On note que $\mathrm{diam}(A) \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$. On dit que la partie A est bornée si $\mathrm{diam}(A) < +\infty$. Il est clair que si une partie non vide d'un espace métrique est bornée, alors elle est nécessairement contenue dans une boule fermée centrée en 0.

Une partie U d'un espace métrique X est dite ouverte si c'est une réunion de boules ouvertes. De manière équivalente, U est ouverte si et seulement si, pour tout point de U, il existe une boule ouverte de centre x et de rayon strictement positif contenue dans U. L'ensemble $\mathcal{O}$ des ouverts de X vérifie les propriétés $(O1)$, $(O2)$ et $(O3)$ de la définition 1.1.1, c'est-à-dire il est stable par union quelconque, intersection finie et contient X et $\emptyset$. Cette topologie particulière qu'on vient de définir à partir des boules est dite la topologie engendrée par la métrique d. Un espace métrique muni de cette topologie est évidemment un espace topologique. On note aussi que la topologie engendrée par une métrique est séparée.

Soit x un point d'un espace métrique X. Les boules de centre x constituent une base de voisinages de x. On peut aussi prendre les boules de centre x et de rayon l'inverse d'un entier, ce qui montre que dans un espace métrique chaque point admet une base de voisinages dénombrable.

Remarque 1.2.1 Par définition, $\overline{B(x,r)}$ est le plus petit fermé (au sens de l'inclusion) contenant $B(x,r)$. Comme la boule fermée $B_f(x,r)$ contient $B(x,r)$, on obtient

$$\overline{B(x,r)} \subseteq B_f(x,r).$$

Cette inclusion peut-être stricte. Toutefois, lorsque X est un espace vectoriel normé, on a toujours l'égalité

$$\overline{B(x,r)} = B_f(x,r) \quad \text{et} \quad \mathring{B}_f(x,r) = B(x,r). \qquad \square$$

Notations : Dans cet ouvrage, on adopte les notations suivantes :

$$\mathbb{B}_r(x) := B_f(x,r) \quad \text{et} \quad \mathbb{B}_r := B_f(0,r). \qquad \square$$

Soient (X,d), (X',d') deux espaces métriques et $f : X \to X'$ une application. Comme les topologies de X et X' sont engendrées par les distances d et d', la continuité de f en un point x de X est équivalente à

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0, \forall y \in X, \quad \Big(d(x,y) < \delta \Longrightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon\Big).$$

Définition 1.2.1 *Soient (X,d), (X',d') deux espaces métriques et $f : X \to X'$ une application. On dit que f est uniformément continue si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0, \forall x, y \in X, \quad \Big(d(x,y) < \delta \Longrightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon\Big).$$

On note que le concept de fonction uniformément continue n'a pas de sens dans les espaces topologiques généraux.

Fonctions semi-continues

Soient X un espace topologique, x_0 un point de X et $f : X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ une fonction. On dit que f est semi-continue supérieurement en x_0 si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage U de x_0 tel que

$$\forall x \in U,\ f(x) \leq f(x_0) + \varepsilon.$$

Si on est dans un espace métrique, f est dite semi-continue supérieurement en x_0 si

$$\limsup_{x \to x_0} f(x) \leq f(x_0).$$

On dit que f est semi-continue supérieurement sur X si elle est semi-continue supérieurement en tout point de X.

On dit que f est semi-continue inférieurement en x_0 si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage U de x_0 tel que

$$\forall x \in U,\ f(x) \geq f(x_0) - \varepsilon.$$

Si on est dans un espace métrique, f est dite semi-continue inférieurement en x_0 si

$$\liminf_{x \to x_0} f(x) \geq f(x_0).$$

On dit que f est semi-continue inférieurement sur X si elle est semi-continue inférieurement en tout point de X.

On note qu'une fonction est continue en un point si, et seulement si, elle est semi-continue supérieurement et inférieurement en ce point.

1.2.2 Suites dans les espaces métriques

On rappelle qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'un espace $(X, \mathcal{T})$ converge vers un point x de X si, pour tout voisinage V de x, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, $x_n \in V$.

Lorsque X est un espace métrique, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite l si et seulement si la suite des réels $(d(x_n, l))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 ou encore

$$(\forall \varepsilon > 0)\ \ (\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N})\ \ (\forall n \in \mathbb{N})\quad \Big(n > N(\varepsilon) \implies d(x_n, l) < \varepsilon\Big).$$

Comme les espace métriques sont séparés, si une suite admet une limite, alors elle est unique.

Définition 1.2.2 *Soient (X, d) un espace métrique et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de X. On appelle sous-suite (ou suite extraite) de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, toute suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ où φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.*

Définition 1.2.3 *Soient (X, d) un espace métrique, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de X et $a \in X$. On dit que a est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers a.*

On a équivalence entre

(a) a est valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$;

(b) $(\forall \varepsilon > 0)\,(\forall N \in \mathbb{N})\,(\exists n \geq N,\ \ |x_n - a| < \varepsilon)$.