Chapitre 6

Résolution numérique d'équations différentielles et d'équations aux dérivées partielles linéaires : les travaux pratiques

1. Les EDO, équations différentielles d'une variable

1.1. Résolution numérique d'une équation simple

■ *Les données du problème*

Dans cette première partie des travaux pratiques nous allons résoudre par les méthodes numériques classiques une équation différentielle dont on connaît la solution et comparer les différentes solutions numériques à la solution analytique.

On considère l'équation différentielle non linéaire du premier ordre $y' = \sqrt{\frac{2}{y} - 1}$ définie pour $0 < y \leq 2$. Cette équation différentielle « historique » est liée à la résolution du problème de la brachistochrone de Bernoulli. L'énoncé du problème physique est simple : une courbe brachistochrone est une courbe sur laquelle on cherche à minimiser le temps de parcours d'un point pesant allant d'un point A à un point B. La résolution analytique de cette équation fut un sujet de polémiques et de défis entre scientifiques au XVIII^{e} siècle.

La solution de cette équation est une cycloïde dont l'équation paramétrique s'écrit (6.1.1-1) $\begin{cases} t = \varphi - \sin\varphi \\ y = 1 - \cos\varphi \end{cases}$ $\varphi \in \mathbb{R}$. L'étude cette courbe paramétrée est aujourd'hui un grand classique que l'on trouve dans tout bon manuel de classe préparatoire ! Pour le TP suivant il suffit de savoir que la solution est 2π périodique et que la courbe présente une symétrie axiale par rapport à la droite d'équation $t = \pi$.

Compte tenu des propriétés géométriques de la cycloïde on se contentera de chercher les solutions numériques de l'équation $y' = \sqrt{\frac{2}{y} - 1} = f(t, y)$ sur l'intervalle [0,1;2,5] avec comme condition initiale $y(0,1) = 0,34$.

■ *Modélisation à l'aide d'une feuille de calcul EXCEL*

Construire à partir des équations (6.1.1-1) le tableau des coordonnées (t,y) de 50 points de la cycloïde dont le paramètre φ est réparti régulièrement sur l'intervalle $[0,\pi]$. Représenter graphiquement ce tableau de valeurs par un nuage de points reliés par une courbe. Cette courbe servira de référence à la validité des calculs suivants.

– *Résolution numérique par la méthode d'Euler*

La construction du tableau des n = 11 valeurs calculées récursivement par la formule $y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$ avec $y_0 = a$ se présente ainsi :

Points(A37)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t_n	0,1	….	…..	…..							2,5
y_n	0,34	….									…

Effectuer un collage spécial comme nouvelle série, des 11 points précédents sur le schéma de la cycloïde. Ne demandez pas de relier les nouveaux points par une courbe. Afin de comparer quantitativement « la valeur » de chacune des méthodes numériques, il est indispensable de disposer de l'angle paramètre φ correspondant à chacune des abscisses t du tableau précédent. Il faut donc résoudre les équations : $\varphi_n - \sin\varphi_n = t_n$ d'inconnue φ_n pour n compris entre 0 et 10. Le tableur EXCEL dispose d'un mini solveur accessible par les menus : Outils puis Valeur cible. Ce solveur est d'utilisation élémentaire. Il suffit de saisir dans le menu « valeur à atteindre » la valeur de t à atteindre (par exemple : 0,1), dans « cellule à définir » la référence de la cellule contenant la formule de l'équation à résoudre ici : `=L(1)C-SIN(L(1)C)` et dans « cellule à modifier » la référence de la cellule qui contiendra la solution calculée par le solveur. Le contenu final de ces trois cellules est « souligné » en caractères gras dans le tableau suivant.

Points	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t_n	**0,1**	….	…..	…..	…..	…...	…..				2,5
y_n	0,34	….									1,9988
	0,1	….									2,5
φ	**0,8539**	….									2,818
$y_{n\,(calculé)}$	0,3429	…..									1,9481
Erreur	0,0029										0,0507

Reporter dans la dernière ligne du tableau l'erreur commise en calculant la valeur absolue de la différence entre les valeurs y_n calculées par la méthode d'Euler et les valeurs y_n de la cycloïde. Calculer pour terminer la valeur moyenne des 11 erreurs.

– *Résolution numérique par la méthode de Runge Kutta d'ordre 2 (RK2)*

La construction de ce second tableau de calculs ne présente aucune difficulté particulière ne serait-ce que la présentation par calculs intermédiaires afin de détailler la formule de récurrence :

A52 Points	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t_n	0,1	0,34									2,5
k1	2,2096	1,3563									0,1759
k2	1,5182	1,143									0,1409
y_n	0,34	0,7044									1,94
φ	0,8539	1,3057									2,818
$y_{n\ (calculé)}$	0,3429	0,738									1,9481
Erreur	0,0029	0,0336									0,0081

Pour compléter ce tableau vous effectuez un copier-coller des valeurs calculées du paramètre φ et vous calculez ensuite l'erreur commise par différence entre les valeurs y_n trouvées par la méthode RK2 et les valeurs y_n de la cycloïde et enfin la moyenne des erreurs. Effectuez un collage spécial, comme nouvelle série, des 11 points précédents sur le schéma de la cycloïde. Ne demandez pas de relier les points par une courbe.

– *Résolution numérique par la méthode Heun*

Le tableau de calcul se présente comme le précédent avec seulement une ligne supplémentaire de calculs intermédiaires :

A68 Points	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t_n	0,1	0,34									2,5
k1	2,2096	1,2994									0,1614
k2	1,6942	1,1657									0,1389
k3	1,5076	1,0721									0,1203
y_n	0,34	0,744									1,9492
φ	0,8539	1,3057									2,818
$y_{n\ (calculé)}$	0,3429	0,738									1,9481
Erreur	0,0029	0,006									0,0011

– Reportez par copier-coller, comme pour le tableau précédent, les lignes permettant les calculs d'erreurs.

– Effectuez un dernier collage spécial, comme nouvelle série, des 11 points précédents sur le schéma de la cycloïde. Ne demandez toujours pas de relier les points par une courbe.

– *Comparaison des trois méthodes*

– Le graphique initial complété par les 3 nuages de points représentant les trois types de calcul permet de visualiser qualitativement les trois résolutions. La qualité est bien telle que le prévoyait l'étude théorique.

– Reportez sur un même schéma les erreurs calculées dans les trois cas vous pouvez constater leur importance relative.

– Comparez par quotient la moyenne de l'erreur commise dans chaque cas avec respectivement h^2, h^3 et h^4… h étant le pas de la graduation.

1.2. Résolution d'équations du second ordre : la chute libre

■ *Compléments théoriques*

Reprenons l'exemple de la chute libre abordé au chapitre 4 dans le cadre de la dérivation numérique. Lorsqu'un corps chute dans l'atmosphère il est soumis à l'effet de la pesanteur mais aussi à d'autres forces dont la poussée d'Archimède et la résistance de l'air. Le modèle de la chute libre classique ne considère que l'action de la pesanteur. Le modèle avec résistance de l'air affine le modèle. L'équation du mouvement en vitesse s'écrit alors : $\frac{dv}{dt}+\frac{kaS}{m}v^2=g$ où a est la masse volumique de l'air, S la surface de l'objet et m sa masse, k = 0,25 est un coefficient lié aux unités et g l'accélération de la pesanteur. Si on pose $v_0=\sqrt{\frac{mg}{kaS}}$ (vitesse limite atteint par l'objet) alors l'équation en vitesse s'écrit : $\frac{dv}{dt}+\frac{g}{v_0^2}v^2=g$ et en distance $\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{g}{v_0^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=g$ on prendra les conditions initiales de position et de vitesse nulles à l'origine des temps.

Application numérique : m = 1 kg, S = $4{,}7\times10^{-3}$ m^2, a = 1,3 kg/m^3 et g = 9,81m/s^2 on a alors $v_0=\sqrt{\frac{1\times9{,}81}{0{,}25\times1{,}3\times4{,}7\times10^{-3}}}\simeq 80\text{ m/s}$ et les équations de la chute libre s'écrivent, pour la distance : $\frac{d^2x}{dt^2}+1{,}53\times10^{-3}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=g$, et pour la vitesse : $\frac{dv}{dt}+1{,}53\times10^{-3}v^2=g$, ou encore sous la forme du système différentiel suivant :

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=v\\ \frac{dv}{dt}=g-1{,}53\times10^{-3}v^2\end{cases}$$

En s'appuyant sur la méthode de Runge-Kutta (RK4), on obtient la récurrence suivante :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \dfrac{h}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right) \\ v_{n+1} = v_n + \dfrac{h}{6}\left(k_1' + 2k_2' + 2k_3' + k_4'\right) \end{cases} \text{avec} \begin{cases} k_1 = v_n \\ k_2 = v_{n+\frac{1}{2}} \\ k_3 = v_{n+\frac{1}{2}} \\ k_4 = v_{n+1} \end{cases} \text{et}$$

$$\begin{cases} k_1' = g - 1{,}53\text{x}10^{-3}v_n^2 \\ k_2' = g - 1{,}53\text{x}10^{-3}\left(v_n + h\dfrac{k_1'}{2}\right)^2 \\ k_3' = g - 1{,}53\text{x}10^{-3}\left(v_n + h\dfrac{k_2'}{2}\right)^2 \\ k_4' = g - 1{,}53\text{x}10^{-3}\left(v_n + hk_3'\right)^2 \end{cases}$$

$x_0 = 0$ et $v_0 = 0$ sur l'intervalle [0,30] subdivisé en 100 points.

En prenant comme valeur approchée de $v_{n+\frac{1}{2}}$ l'interpolation linéaire entre les points d'abscisses n et n + 1, $v_{n+\frac{1}{2}} \simeq v_n + \dfrac{v_{n+1} - v_n}{2} = \dfrac{v_{n+1} + v_n}{2}$, les formules de Runge-Kutta deviennent :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \dfrac{h}{2}\left(v_n + v_{n+1}\right) \\ v_{n+1} = v_n + \dfrac{h}{6}\left(k_1' + 2k_2' + 2k_3' + k_4'\right) \end{cases} \text{et} \begin{cases} k_1' = g - 1{,}53\text{x}10^{-3}v_n^2 \\ k_2' = g - 1{,}53\text{x}10^{-3}\left(v_n + h\dfrac{k_1'}{2}\right)^2 \\ k_3' = g - 1{,}53\text{x}10^{-3}\left(v_n + h\dfrac{k_2'}{2}\right)^2 \\ k_4' = g - 1{,}53\text{x}10^{-3}\left(v_n + hk_3'\right)^2 \end{cases}$$

■ *Modélisation à l'aide d'une feuille de calcul EXCEL*

Après avoir saisi et nommé les constantes h = 30/100, ct = $1{,}53 \times 10^{-3}$ et g = 9,81.

Construire le tableau récurrent suivant des calculs de la méthode RK4.

Points(A7)	0	1	2	3	4	5	….
t	0	0,3	0,6	0,9	1,2	1,5	….
k'1		9,81	9,796760214	9,75718352	9,69169464	9,60099072	….
k'2		9,80668707	9,780228353	9,72759281	9,64934383	9,54631051	….
k'3		9,80668931	9,780261816	9,72769246	9,64954296	9,5466399	….
k'4		9,79675723	9,757177537	9,6916856	9,60097854	9,48601023	….
v runge	0	2,9416755	5,875421404	8,79339339	11,6879157	14,5515608	….
x runge	0	1,32256454	3,522886754	6,59508312	10,5310046	15,3203222	….
v euler	0	2,943	5,882024487	8,80914391	11,716525	14,5965149	….
x euler	0	0,8829	2,647507346	5,29025052	8,80520803	13,1841625	….

Remarque : Les deux dernières lignes du tableau obtenues par la méthode d'Euler permettent de valider les résultats obtenus par la méthode de Runge-Kutta.

Tracer les schémas de variation de x et v en fonction de t obtenus par la méthode de Runge-Kutta. Commentez les résultats observés au regard de la réalité physique.

1.3. Résolution d'équations du second ordre : le pendule simple amorti

■ *Compléments théoriques*

Reprenons l'exemple introductif d'un pendule simple de masse m et de longueur L. Si on note y(t) l'angle avec la verticale, alors y(t) est solution de l´équation différentielle du second ordre $y''(t) = \frac{-c}{m} y'(t) - \frac{g}{L} \sin y(t)$ où c est un coefficient de frottement et g = 9,81m/s^2. Cette équation du second ordre s'écrit sous la forme du système du premier ordre suivant $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{-c}{m} x - \frac{g}{L} \sin y = f(t, x, y) \\ \frac{dy}{dt} = x \end{cases}$

On effectuera la simulation numérique en prenant m = 1 kg L = 1 m, le frottement c comme paramètre variant entre 0,5 et 2 et comme conditions initiales y(0) = 0,1 (ou 1) et y'(0) = x(0) = 0.

En s'appuyant de nouveau sur la méthode RK4, on obtient :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \frac{h}{6}\left(k_1' + 2k_2' + 2k_3' + k_4'\right) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right) \end{cases} \quad \begin{cases} k_1 = y_n \\ k_2 = y_{n+\frac{1}{2}} \\ k_3 = y_{n+\frac{1}{2}} \\ k_4 = y_{n+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} k'_1 = \dfrac{-c}{m} x_n - \dfrac{g}{L}\sin y_n \\ k'_2 = \dfrac{-c}{m}\left(x_n + h\dfrac{k'_1}{2}\right) - \dfrac{g}{L}\sin\left(y_n + h\dfrac{k'_1}{2}\right) \\ k'_3 = \dfrac{-c}{m}\left(x_n + h\dfrac{k'_2}{2}\right) - \dfrac{g}{L}\sin\left(y_n + h\dfrac{k'_2}{2}\right) \\ k'_3 = \dfrac{-c}{m}\left(x_n + hk'_3\right) - \dfrac{g}{L}\sin\left(y_n + hk'_3\right) \end{cases}$$

En utilisant l'expression simplifiée de y_n et les valeurs numériques de m et L, on obtient finalement la récurrence suivante :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \dfrac{h}{6}\left(k'_1 + 2k'_2 + 2k'_3 + k'_4\right) \\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}\left(x_n + x_{n+1}\right) \end{cases} \quad \begin{cases} k'_1 = -cx_n - g\sin y_n \\ k'_2 = -c\left(x_n + h\dfrac{k'_1}{2}\right) - g\sin\left(y_n + h\dfrac{k'_1}{2}\right) \\ k'_3 = -c\left(x_n + h\dfrac{k'_2}{2}\right) - g\sin\left(y_n + h\dfrac{k'_2}{2}\right) \\ k'_4 = -c\left(x_n + hk'_3\right) - g\sin\left(y_n + hk'_3\right) \end{cases}$$

■ *Modélisation à l'aide d'une feuille de calcul EXCEL*

Comme pour l'exemple précédent, la résolution se résume à l'élaboration d'un tableau récurrent construit à partir des formules précédentes. Le choix des paramètres est important et détermine la validité des calculs.

Nombre de points du calcul : 800
Pas de calcul : h = 0,005
c = 1
g = 9,81
a = y(0) = 0,1

Donnez un nom EXCEL significatif à chacune des cellules contenant ces valeurs. Afin de simplifier l'écriture des formules de calcul des k'_i vous pouvez utiliser la fonction VBA suivante :

```
Function f(c As Single, x As Single, y As Single) As Single
f = -c * x - 9.81 * Sin(y)
End Function
```

Remarques :
– La présentation en tableau vertical est justifiée par le nombre important de points du calcul.

– La pseudo période étant proche de 2, les valeurs ci-dessus permettent une simulation pour t variant de 1 à 4.

Points(A16)	t	k'1	k'2	k'3	k'4	y	x
0	0	-8,2548304	-8,1230593	-8,1251898	-7,9921203	1	0
1	0,005	-8,2136726	-8,08255	-8,0846701	-7,9522719	0,99989845	-0,04061954
2	0,01	-8,1716433	-8,0411491	-8,0432596	-7,9115152	0,99959431	-0,08103653
3	0,015	-8,1287498	-7,9988656	-8,000968	-7,8698592	0,9990886	-0,12124651
4	0,02	-8,085001	-7,9557076	-7,9578013	-7,8273134	0,99838237	-0,16124507
5	0,025	-8,0404015	-7,9116821	-7,9137688	-7,783884	0,99747669	-0,20102785
…	…	…	…	…	…	…	…
800	4	-1,3343823	-1,2985194	-1,2994834	-1,2645215	0,11193222	0,23861872

Lorsque c = 0 (pas de frottement) et y proche de 0 (amplitude angulaire faible $y < 0{,}1$) l'équation du mouvement s'écrit simplement : $y''(t) = -g\, y(t)$ avec $y(0)$ = 0,1 et y'(0) = 0. On connaît la solution analytique de cette équation : $z(t) = a \cos \sqrt{g} t$. Vous pouvez ajouter une dernière colonne au tableau précédent pour le calcul des valeurs de cette dernière fonction, valeurs qui serviront de référence pour la validation et le commentaire des résultats.

■ *Analyse des résultats*

– Représentez sur le même graphique la solution y(t) et la fonction de référence z(t).

– Représentez sur un second graphique le diagramme de phase formé des points de coordonnées (y(t), x(t)).

– Prenez comme coefficient d'amortissement c = 0 et y(0) = 0,1. Ces valeurs vous permettent de vérifier la qualité de votre programmation puisque les solutions y(t) et z(t) doivent quasiment coïncider. Que penser du diagramme de phase ?

– Prenez comme coefficient d'amortissement c = 0 et des valeurs de y(0) variant de 0,1 à 1,5 par pas de 0,2, ce qui pratiquement signifie que l'on « lâche » successivement le pendule entre 5° et 90° par pas de 10°. Comment évolue la « périodicité du pendule », comment évolue le diagramme de phase ?

– Prenez comme coefficient d'amortissement c = 1 et y(0) = 1 ou 0,1 pour valeur initiale. Observer l'amortissement de y(t) et surtout l'évolution de la forme du diagramme de phase.

1.4. Résolution d'équations du second ordre : l'attracteur de Lorenz

■ *Compléments théoriques*

Comme noté dans l'introduction du chapitre précédent le système différentiel suivant :