1
Généralités sur les fonctions

1. NOTIONS DE BASE

1.1. Sens de variation d'une fonction

Soit f une fonction définie sur un ensemble I de $\mathbb{R}$.
Il est vivement conseillé d'étudier le sens de variation sur **des intervalles** I.

Définitions

f est dite **croissante** si elle conserve l'ordre sur I, c'est-à-dire :
pour **tous** nombres réels $x_1, x_2 \in I$, **si** $x_1 < x_2$, **alors** $f(x_1) \leq f(x_2)$.

f est dite **décroissante** si elle inverse l'ordre sur I, c'est-à-dire :
pour **tous** nombres réels $x_1, x_2 \in I$, **si** $x_1 < x_2$, **alors** $f(x_1) \geq f(x_2)$.

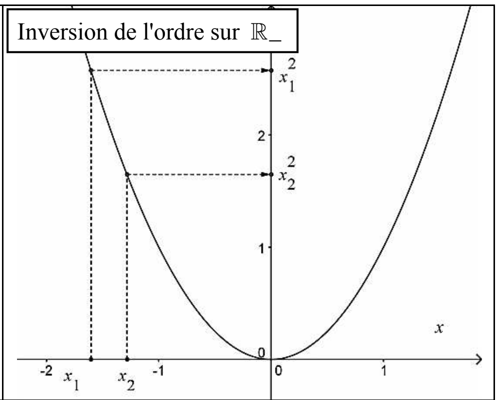
Si, pour tous nombres réels $x_1, x_2 \in I$ tels que $x_1 < x_2$, on a :
$f(x_1) < f(x_2)$, alors on dit que f est strictement croissante sur I.

Si, pour tous nombres réels $x_1, x_2 \in I$ tels que $x_1 < x_2$, on a :
$f(x_1) > f(x_2)$, alors on dit que f est strictement décroissante sur I.

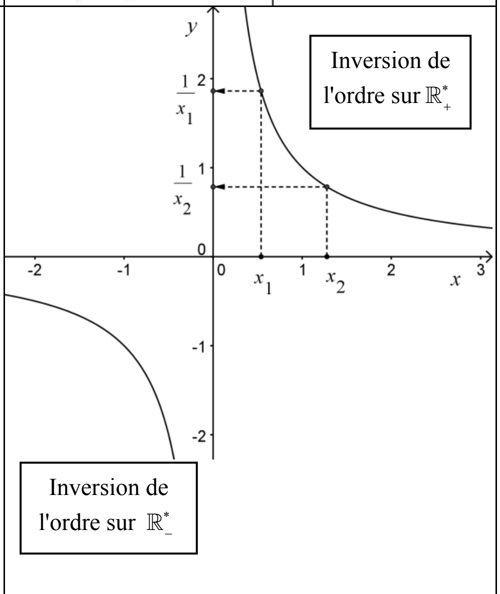
Une fonction **monotone** sur un intervalle I est une fonction croissante sur (tout) I ou décroissante sur I.

1.2. Fonctions de référence

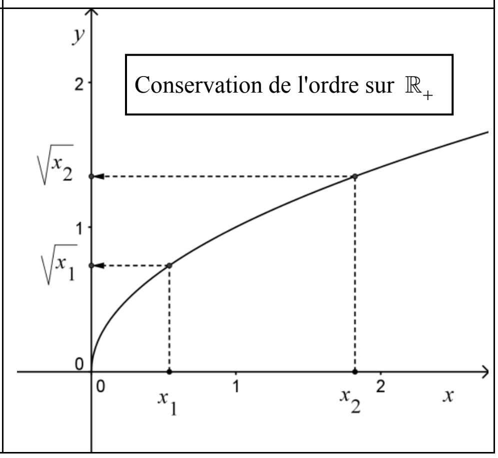
- La fonction carré, définie sur $\mathbb{R}$ par :
  $$f(x) = x^2$$
  est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
- Elle est positive sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$.
- Sa courbe est une parabole.

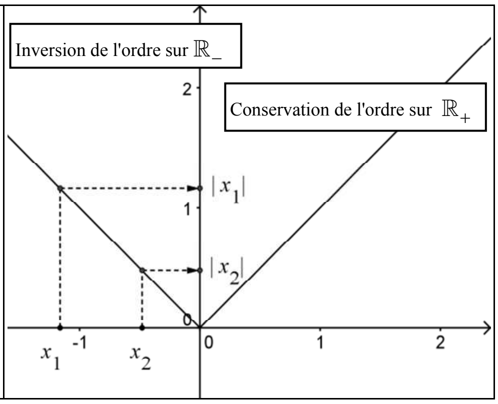


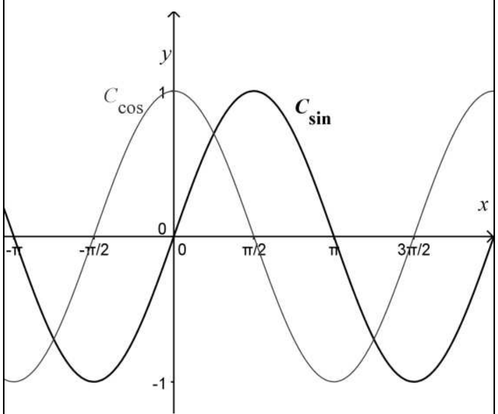
- La fonction inverse, définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x}$
  est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-^* =]-\infty\,;0[$
  et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^* =]0\,;+\infty[$.
  f n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$
  En effet, $-2 < 3$, mais $-\dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{3}$.
- Elle est strictement négative sur $\mathbb{R}_-^* =]-\infty\,;0[$, strictement positive sur $\mathbb{R}_+^* =]0\,;+\infty[$.
- Sa courbe est une hyperbole, formée de deux branches.



- La fonction racine carrée est définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = \sqrt{x}$
  f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
- Elle est positive sur $\mathbb{R}_+$.
- Sa courbe est une demi-parabole.



• La fonction valeur absolue est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\lvert x \rvert$. si $x \leq 0$, $f(x)=-x$ si $x \geq 0$, $f(x)=x$ f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. • Elle est positive sur $\mathbb{R}$. • Sa courbe est une la réunion de deux demi-droites.	

Ces fonctions peuvent être vues dans les chapitres suivants • Les fonctions cosinus et sinus sont définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \cos(x)$, fréquemment noté $\cos x$ $g(x) = \sin(x)$, fréquemment noté $\sin x$. f est strictement croissante sur $[-\pi;0]$, strictement décroissante sur $[0;\pi]$. g est strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$. • Leurs courbes sont des "sinusoïdes".	

✍ Exercice d'application 1

Comment déterminer le sens de variation par inégalités successives.

Déterminer les variations de $f : x \mapsto \sqrt{1-x}$ sur son ensemble de définition par inégalités successives.

Corrigé

Déterminons tout d'abord D_f.

f est définie sur l'ensemble des x vérifiant : $1 - x \geq 0$.
$1 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$
Le domaine de définition de f est donc $D_f =]-\infty\ ;\ 1]$.

Soient x_1 et $x_2 \in]-\infty\ ;\ 1]$ tels que $x_1 < x_2$.
Déterminons l'ordre de leurs images, par inégalités successives.

$$\begin{aligned} & x_1 < x_2 \leq 1 \\ & \qquad\qquad\qquad \times(-1) \\ & -x_1 > -x_2 \geq -1 \\ & \qquad\qquad\qquad +1 \\ & 1 - x_1 > 1 - x_2 \geq \mathbf{0}\ \mathbf{(*)} \end{aligned}$$

On applique la fonction racine carrée, strictement **croissante** sur $\mathbb{R}_+$.

Elle conserve l'ordre, donc **le sens de l'inégalité est conservé.**
$\sqrt{1 - x_1} > \sqrt{1 - x_2}$.

Concluons : si x_1 et $x_2 \in]-\infty\ ;\ 1]$ et $x_1 < x_2$, alors $f(x_1) > f(x_2)$.

$\boxed{f \text{ est donc strictement décroissante sur son ensemble de définition}}$.

Remarque

L'inégalité "≥ 0" dans (*) est une partie importante de la justification, car elle affirme que les nombres auxquels on applique la fonction racine carrée sont bien dans un intervalle où celle-ci est monotone (ici strictement croissante).

⇨ *Pour s'entraîner sur les inégalités successives : exercices 1, 2, 3, 4.*

2. OPERATIONS SUR LES FONCTIONS

2.1. Opérations sur les fonctions

Soit u et v deux fonctions définies sur les ensembles D_u et D_v . On définit alors :

Fonction	Description	Expression	Ensemble de définition
$k\,u$	Produit d'une fonction u par une "constante multiplicative" $k \in \mathbb{R}$	$(k\,u)\,(x) = k \times u(x)$	$D = D_u$
$u+v$	Somme de 2 fonctions	$(u+v)(x) = u(x)+v(x)$	$D = D_u \cap D_v$
$u \times v$	Produit de deux fonctions	$(u \times v)(x) = u(x) \times v(x)$	$D = D_u \cap D_v$
$\dfrac{u}{v}$	Quotient de deux fonctions	$\left(\dfrac{u}{v}\right)(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$	D est l'ensemble des $x \in D_u \cap D_v$ tels que $v(x) \neq 0$
$\sqrt{u}$	Composée d'une fonction u, suivie de la fonction racine carrée	$\sqrt{u}\,(x) = \sqrt{u(x)}$	D est l'ensemble des $x \in D_u$ tels que $u(x) \geq 0$

2.2. Sens de variation, par opérations élémentaires

Soit u et v deux fonctions monotones sur un intervalle I.

Fonction	Conditions	Sens de variation sur ***I***
$k\,u$	si $k > 0$	ku a le sens de variation de u.
	si $k < 0$	ku a le sens contraire de celui de u.
$u + v$	si u et v ont le même sens de variation	$u + v$ a le sens de variation de u et v.
$\dfrac{1}{u}$	si u est de signe constant, et ne s'annule pas	$\dfrac{1}{u}$ a le sens contraire de celui de u.
$\sqrt{u}$	si u est positive	$\sqrt{u}$ a le même sens de variation que u.

Remarques

Le produit de deux fonctions croissantes n'est pas nécessairement une fonction croissante, comme dans l'exemple :
$f : x \mapsto 2x^2$ est non croissante sur $\mathbb{R}$, alors que les fonctions :
$u : x \mapsto 2x$ et $v : x \mapsto x$ sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}$.

⇨ *Pour s'entraîner sur les opérations élémentaires : exercices 5, 6, 7.*

✍ Exercice d'application 2 ____ *Variations par opérations élémentaires*

Dans chaque cas, déterminer le sens de variation des fonctions suivantes sur l'intervalle *I*.

1. $f : x \mapsto 10x - \dfrac{1}{x}$ $\qquad I = \left]-\infty ; -1\right]$

2. $g : x \mapsto 7 - 5x^2 + \dfrac{1}{x}$ $\qquad$ *I* est à choisir entre $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$.

Indication
Pour *g* : il faut donc choisir un "camp" ($\mathbb{R}_-^*$ ou $\mathbb{R}_+^*$), de façon à voir *g* comme la somme de fonctions monotones de même sens de variation.

Corrigé

1. $u : x \mapsto 10x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc sur *I* (fonction affine de coefficient directeur 10 > 0).

La fonction inverse : $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$ donc sur *I*, car l'intervalle $\left]-\infty ; -1\right]$ est inclus dans $\mathbb{R}_-^*$.

De plus, – 1 < 0, donc $v : x \mapsto -\dfrac{1}{x}$ est de sens contraire, strictement croissante sur *I*.

$$\boxed{f = u + v \text{ est donc croissante sur } I}\ .$$

2. $u : x \mapsto x^2$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
Or $-5 < 0$, donc $v : x \mapsto -5x^2$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

De plus, $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et $w : x \mapsto 7$ est constante.

$$\boxed{g = u + v + w \text{ est donc une fonction strictement décroissante sur } \mathbb{R}_+^*}.$$

EXERCICES D'ENTRAINEMENT ET D'APPROFONDISSEMENT

✍ Exercice 1 ______ *Variations par inégalités successives*

A l'aide d'inégalités successives, déterminer les variations des fonctions suivantes, sur l'intervalle I donné.

1. $f : x \mapsto -\dfrac{2}{1-x^2}$, $\quad I = \left]-1\,;0\right]$

2. $g : x \mapsto \left(2-\sqrt{x}\right)^2$, $\quad I = [0\,;5]$.

✍ Exercice 2 _ *Restitution de connaissances : comparaison de fonctions de référence*

Soit les fonctions $f : x \mapsto x$, $g : x \mapsto x^2$ et $h : x \mapsto \sqrt{x}$.

1. Conjecturer les positions relatives sur l'intervalle $\left[0;1\right]$ de leurs trois courbes representatives, à l'aide de la calculatrice.
Indication : donner la position relative entre deux courbes, c'est simplement dire quelle courbe se situe strictement au dessus de l'autre, sur des intervalles donnés et préciser les abscisses de leurs points d'intersection.

2. Démontrer cette conjecture en comparant d'une part $g(x)$ et $f(x)$, et d'autre part $f(x)$ et $h(x)$.

✍ Exercice 3 ______ *Logique et inégalité*

En justifiant la réponse donnée, complétez le plus précisément possible par $\Rightarrow$, $\Leftarrow$ ou $\Leftrightarrow$. Dans le cas où une implication n'est pas réciproque, donner des contre-exemples.

a) $\dfrac{1}{3} \le \dfrac{1}{x}$ ... $x \le 3$

b) $t^2 \ge \pi$ ... $t \ge \sqrt{\pi}$

c) $y > 4$ ... $\dfrac{1}{\sqrt{y}} < \dfrac{1}{2}$

d) Soit u une fonction.

u strictement croissante sur I ... pour tout nombre réel $k > 0$, la fonction $k\,u$ est strictement croissante sur I.

e) Soit u et v deux fonctions.
u et v sont croissantes sur I ... la fonction $u + v$ est croissante sur I.

✍ Exercice 4 — *Approfondissement : comparaison de fonctions*

On souhaite comparer $\sqrt{1+x}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$.

Pour cela, on pose $f(x) = \sqrt{1+x}$ et $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$

1. Déterminer les ensembles de définition de f et g.
2. On définit la fonction $h = f - g$.
a) Déterminer D_h et donner une expression de $h(x)$.
b) Déterminer le signe de $h(x)$ et conclure.
3. Sans calculatrice, déterminer, dans chaque cas, le plus grand nombre parmi :
a) $\sqrt{1{,}0001}$, $\dfrac{1}{\sqrt{0{,}9999}}$
b) $\left(1-\sqrt{1{,}0001}\right)^2$, $\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{0{,}9999}}\right)^2$.

✍ Exercice 5 — *Variations par opérations élémentaires*

Déterminer les variations des fonctions suivantes sur l'intervalle $]0;1]$.

1. $f : x \mapsto \dfrac{1}{3x+4} + \dfrac{1}{3x-4}$.
2. $h : x \mapsto \dfrac{2x+3}{x}$.

✍ Exercice 6 — *Inégalité et fonction homographique*

Soit la fonction homographique suivante : $f : x \mapsto \dfrac{5x+1}{3x-12}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.