Jour n°1

Exercice 1.0

Soit A une matrice carrée d'ordre $n \geqslant 2$ inversible.
Montrer qu'il existe un polynôme P de degré $n-1$ tel que $A^{-1} = P(A)$.

Exercice 1.1

Pour $x \in [0,1]$ et n entier $\geqslant 2$, on pose $f_n(x) = x^n - nx + 1$.

1) Montrer qu'il existe un et un seul $x_n \in [0,1]$ tel que $f_n(x_n) = 0$.

2) a) Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

b) Soit $a \in \,]0,1[$. Étudier le signe de $f_n(a)$ pour n suffisamment grand. En déduire la limite de la suite (x_n).

3) a) Donner un équivalent de x_n quand n tend vers $+\infty$.

b) $\boxed{\text{QS}}$ Donner un développement asymptotique à deux termes de x_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 1.2

1) Tracer la courbe d'équation polaire $r = \sqrt{4\cos^2\theta - 1}$.

2) Calculer l'aire comprise entre la courbe et le cercle de centre O et de rayon 1.

Soit A une matrice carrée d'ordre $n \geqslant 2$ inversible.
Montrer qu'il existe un polynôme P de degré $n-1$ tel que $A^{-1} = P(A)$.

Analyse stratégique de l'énoncé

$\hookrightarrow$ Cet exercice d'algèbre, très court, mentionne les polynômes de matrices. Il sera résolu très rapidement si l'on pense au théorème de Cayley-Hamilton. Un exercice très facile, qui exige cependant de bien connaître son cours.

Corrigé

On sait que le polynôme caractéristique de A est de degré n et s'écrit

$$\chi_A(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \quad \text{avec } a_0 = \det A \neq 0 \text{ (car } A \text{ inversible)}$$

On dispose aussi du théorème de Cayley-Hamilton qui affirme que χ_A est annulateur de A, ce qui s'écrit $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k A^k = 0$, ou encore $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k A^k = -a_0 I_n$.

Ainsi $A(a_1 I_n + \cdots + a_n A^{n-1}) = -a_0 I_n$, et puisque a_0 est non nul, on obtient

$$\boxed{A^{-1} = -\frac{1}{a_0}(a_1 I_n + \cdots + a_n A^{n-1}) = P(A) \quad \text{avec } P = -\frac{1}{a_0}(a_1 + \cdots + a_n X^{n-1})}$$

(P est bien un polynôme de degré $n-1$ puisque $a_n = (-1)^n \neq 0$).

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir que la méthode utilisée dans le corrigé permet, si l'on connaît un polynôme annulateur de A de coefficient constant non nul (par exemple le polynôme caractéristique), de calculer facilement A^{-1} à l'aide des puissances de A.

♡ Il faut se souvenir du théorème de Cayley-Hamilton, et penser à l'utiliser dès que l'énoncé mentionne des polynômes de matrices (ou d'endomorphismes).

Formulaire

- Si A est une matrice carrée d'ordre n, le polynôme caractéristique χ_A de A s'écrit

$$\chi_A(X) = \det(A - XI_n) = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1}\operatorname{tr}(A) X^{n-1} + \cdots + a_1 X + \det(A).$$

Lorsque ce polynôme est scindé, ses racines $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, distinctes ou non (qui sont les valeurs propres de A), vérifient donc, d'après les relations coefficients-racines :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \operatorname{tr} A \quad \text{et} \quad \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \det A.$$

Énoncé

Pour $x \in [0,1]$ et n entier $\geqslant 2$, on pose $f_n(x) = x^n - nx + 1$.

1) Montrer qu'il existe un et un seul $x_n \in [0,1]$ tel que $f_n(x_n) = 0$.

2) a) Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

b) Soit $a \in \,]0,1[$. Étudier le signe de $f_n(a)$ pour n suffisamment grand. En déduire la limite de la suite (x_n).

3) a) Donner un équivalent de x_n quand n tend vers $+\infty$.

b) $\boxed{\text{QS}}$ Donner un développement asymptotique à deux termes de x_n quand n tend vers $+\infty$.

Analyse stratégique de l'énoncé

Il s'agit ici de l'étude d'une suite formée par les racines d'une certaine équation. Certaines méthodes d'étude d'une telle suite sont standard, cependant, ce genre d'exercice, en particulier la recherche d'équivalents, demande un peu d'intuition.

1) Il s'agit ici de montrer que la fonction f_n s'annule une et une seule fois sur l'intervalle $[0,1]$.

↪ Cette question ne doit pas poser de problème. La méthode est archi-classique : étude de fonction puis théorème de bijection.

2) Pour montrer que la suite converge, puisqu'elle est bornée (en effet, $0 \leqslant x_n \leqslant 1$ d'après la première question), on essaiera bien sûr d'étudier son sens de variation.

L'indication de la question b) peut sembler un peu obscure. Si vous ne comprenez pas la méthode proposée par l'énoncé, vous pouvez essayer de trouver la limite de (x_n) par une autre méthode.
Si vous lisez l'énoncé en entier, vous remarquerez qu'à la question 3, on demande un équivalent de x_n ; or, si une suite converge vers une limite ℓ *non nulle*, un équivalent immédiat est ℓ ; le fait que cette question soit ainsi posée sous-entend que la limite ne peut être que 0 ou ∞ (ce dernier cas étant exclu ici).

↪ On ne le redira jamais assez : lisez attentivement *tout* l'énoncé avant de commencer.

> Rapport du jury 2010
>
> Le temps de l'épreuve orale passe très vite pour un candidat ; pour être le plus efficace possible dans le temps de préparation, quelques instants de réflexion appliquée à la lecture du sujet ne sont sans doute pas inutiles de façon à effectuer un travail aussi adapté que possible aux questions posées.

3) La recherche d'un équivalent n'est pas toujours une chose facile. Il faut absolument utiliser l'équation vérifiée par x_n.

Une fois l'équivalent trouvé, la démarche pour trouver un développement asymptotique à deux termes est toujours la même : si l'on a trouvé $x_n \sim u_n$, on posera $y_n = x_n - u_n$, de sorte que $y_n = o(u_n)$, puis on remplacera x_n dans l'équation par $y_n + u_n$ pour essayer de trouver une relation intéressante sur y_n.

$\hookrightarrow$ Cette question est nettement plus difficile, et ne peut être abordée qu'après avoir traité correctement les deux premières.

Corrigé

1) La fonction f_n est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0,1]$, et $f_n'(x) = n(x^{n-1}-1)$ est strictement négatif sur $[0,1[$. La fonction f_n est strictement décroissante.

x	0		x_n		1
$f_n(x)$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$2-n$

f_n étant continue strictement décroissante, elle réalise une bijection de $[0,1]$ sur $[2-n,1]$. Puisque $n \geqslant 2$, 0 appartient à $[2-n,1]$ donc possède un unique antécédent x_n par f_n.

$$\boxed{\text{Il existe un et un seul } x_n \in [0,1] \text{ tel que } f_n(x_n) = 0.}$$

2) a) Nous allons étudier les variations de la suite (x_n).

La méthode dans ce genre d'exercice est classique :

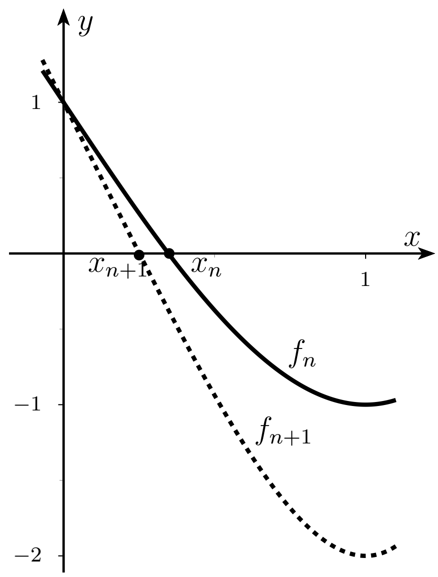
Puisqu'on connaît les variations de f_n, pour positionner x_{n+1} par rapport à x_n, il suffit de connaître le signe de $f_n(x_{n+1})$ (ou de $f_{n+1}(x_n)$). Pour cela, on peut étudier le signe de $f_{n+1} - f_n$:

Pour $x \in [0,1]$, $f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^n(x-1) - x$, donc $f_{n+1}(x) - f_n(x) \leqslant 0$.

On aura donc en particulier $f_n(x_{n+1}) = f_n(x_{n+1}) - f_{n+1}(x_{n+1}) \geqslant 0$, et, compte tenu du tableau de variations de f_n, on en déduit que $x_{n+1} \leqslant x_n$. En conclusion :

$$\boxed{\text{La suite } (x_n) \text{ est décroissante ; étant minorée par } 0\text{, elle converge.}}$$

Le principe utilisé est illustré par la figure ci-dessous :



b) Soit $a \in]0,1[$. $\lim_{n\to+\infty} a^n = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} f_n(a) = \lim_{n\to+\infty}(a^n - na + 1) = -\infty$. Il en résulte qu'à partir d'un certain rang, $f_n(a) < 0$, donc, compte tenu du tableau de variations de f_n, on aura $x_n < a$.

Ainsi, on a démontré

$$\forall a \in]0,1[\ ,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geqslant n_0 \Longrightarrow 0 < x_n < a$$

Vous remplacez le a par un ε, et vous reconnaîtrez la définition de la limite ! On a donc démontré que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} x_n = 0.}$$

Ce résultat pouvait s'obtenir par une autre méthode que celle suggérée par l'énoncé. En effet, la suite étant décroissante, on aura, pour $n \geqslant 3$, $0 < x_n \leqslant x_3 < 1$, d'où $0 < x_n^n \leqslant x_3^n$ et $\lim_{n\to\infty} x_n^n = 0$. Puisque $x_n = \dfrac{x_n^n + 1}{n}$, on en déduit directement $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$.

3) a) L'avantage de la méthode décrite dans la remarque ci-dessus est de fournir aussi l'équivalent demandé. En effet, on vient de voir que $\lim_{n\to+\infty} x_n^n = 0$. Or $nx_n = x_n^n + 1$. Donc $\lim_{n\to+\infty} nx_n = 1$ ce qui signifie exactement que

$$\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.}$$

b) L'équivalent obtenu ci-dessus s'écrit aussi $x_n = \dfrac{1}{n} + y_n$, où $y_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$. La question posée revient donc à chercher un équivalent de y_n. La méthode consiste à remplacer x_n dans l'égalité $f_n(x_n) = 0$ par le développement limité que l'on vient d'obtenir afin de trouver une relation sur y_n et d'en déduire un équivalent.

On traduit donc la relation $x_n^n = nx_n - 1$ sous la forme :

$$\left(\frac{1}{n} + y_n\right)^n = n\left(\frac{1}{n} + y_n\right) - 1 = ny_n$$

d'où

$$ny_n = \mathrm{e}^{n\ln\left(\frac{1}{n}+y_n\right)} = \mathrm{e}^{n\left[\ln\frac{1}{n}+\ln(1+ny_n)\right]} = \mathrm{e}^{n\left[\ln\frac{1}{n}+ny_n+o(ny_n)\right]}$$

le développement limité du ln étant possible puisque ny_n tend vers 0 quand $n \to +\infty$.

Ainsi : $ny_n = \mathrm{e}^{-n\ln n}\mathrm{e}^{n(ny_n+o(ny_n))}$. Mais $ny_n = nx_n - 1 = x_n^n < x_3^n$ pour $n \geqslant 3$, et $0 < x_3 < 1$, donc, par croissances comparées, $\lim_{n\to\infty} n(ny_n + o(ny_n)) = 0$ et finalement

$$ny_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-n\ln n} = \frac{1}{n^n} \quad \text{d'où} \quad y_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{n+1}}.$$

En conclusion :

$$\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} + \frac{1}{n^{n+1}} + o\left(\frac{1}{n^{n+1}}\right).}$$

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir de l'utilisation des variations de f_n, combinée avec le signe de $f_{n+1} - f_n$, pour étudier la monotonie de la suite.

♡ Il faut se souvenir que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ ne signifie pas seulement $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$, (lorsque $v_n \neq 0$), mais aussi (et surtout) : $u_n \underset{+\infty}{=} v_n + o(v_n)$.

♡ Il faut se souvenir de la méthode pour obtenir un développement asymptotique de proche en proche : à partir d'un simple équivalent, qui peut s'écrire sous forme d'un développement limité à 1 terme, on considère la différence entre x_n et cet équivalent, puis on « injecte » le résultat obtenu dans l'équation initiale afin d'obtenir une estimation de cette différence.

Formulaire

• Théorème de bijection

Soit f une application définie sur un *intervalle* I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On suppose f *continue* et *strictement monotone* sur I. Alors :

a) $f(I)$, image de I par f, est un intervalle.

b) f est bijective de I sur $f(I)$.

c) f^{-1} est continue sur $f(I)$.

d) f^{-1} est strictement monotone sur $f(I)$, de même sens de variation que f.

Nous rappelons ensuite quelques définitions importantes concernant le comportement asymptotique d'une suite.

• Limite d'une suite

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E est dite convergente s'il existe $\ell \in E$ tel que :

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N} \ , \ n \geqslant n_0 \Longrightarrow \|u_n - \ell\| < \varepsilon.$$

Si (u_n) est une suite convergente, le vecteur ℓ précédent est unique ; on l'appelle limite de la suite u, notée : $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Dire que $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ peut aussi s'écrire :

$$\forall V \in \mathcal{V}(\ell) \ , \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N} \ , \ n \geqslant n_0 \Longrightarrow u_n \in V$$

($\mathcal{V}(\ell)$ désigne l'ensemble des voisinages de ℓ dans E).

L'intérêt de cette écriture est qu'elle permet de généraliser la définition de la limite au cas d'une suite réelle (u_n) qui tend vers $\pm\infty$:

> Soit en effet (u_n) une suite à valeurs réelles.
> Par définition, un voisinage de $+\infty$ $\big($resp. $-\infty\big)$ dans $\mathbb{R}$ est une partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle de la forme $]A, +\infty[$ $\big($resp. $]-\infty, A[\big)$.
> Ainsi, dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ s'écrira :

$$\forall A \in \mathbb{R}\ ,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}\ ,\ n \geqslant n_0 \Longrightarrow u_n > A$$

et dire que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$ s'écrira :

$$\forall A \in \mathbb{R}\ ,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}\ ,\ n \geqslant n_0 \Longrightarrow u_n < A.$$

Propriétés :

1. Dire que $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ signifie aussi que la suite réelle $\big(\|u_n - \ell\|\big)$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$.

   Ainsi, pour démontrer qu'une suite (u_n) à valeurs dans E converge vers ℓ, il peut être intéressant de considérer la suite réelle $\big(\|u_n - \ell\|\big)$ ce qui permet d'utiliser des techniques spécifiques aux suites réelles.
2. Toute suite convergente est bornée.
3. Soient (u_n) et (v_n) deux suites d'éléments de E convergentes respectivement vers ℓ et ℓ'. Alors la suite $(u_n + v_n)$ converge vers $\ell + \ell'$.
4. Soit (λ_n) une suite d'éléments de $\mathbb{K}$ convergente vers $\lambda \in \mathbb{K}$, et (u_n) une suite d'éléments de E convergente vers $\ell \in E$. Alors, la suite $(\lambda_n . u_n)$ converge vers $\lambda . \ell$

• Comparaisons de suites

▷ *Définitions :*

Soit (u_n) une suite à valeurs dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé E, et soit (α_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$.

- On dit que la suite (u_n) est dominée par (α_n) si et seulement si il existe un réel $M \in \mathbb{R}^*$ et un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que :

  $$\|u_n\| \leqslant M|\alpha_n| \text{ pour tout } n \geqslant n_0.$$

  On écrira alors (notations de Landau) :

  $$u_n = \mathcal{O}(\alpha_n).$$

  S'il existe un rang à partir duquel α_n est toujours non nul, on a l'équivalence :

  $$u_n = \mathcal{O}(\alpha_n) \iff \text{la suite } \left(\frac{1}{\alpha_n} u_n\right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée.}$$

- Soit (u_n) une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé E, et soit (α_n) une suite à valeurs réelles.

  On dit que la suite (u_n) est négligeable devant (α_n) si et seulement si pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

  $$\|u_n\| \leqslant \varepsilon|\alpha_n| \text{ pour tout } n \geqslant n_0.$$

  On écrira alors (notations de Landau) :

  $$u_n = o(\alpha_n).$$

  S'il existe un rang à partir duquel α_n est toujours non nul, on a l'équivalence :

  $$u_n = o(\alpha_n) \iff \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\alpha_n} u_n = 0.$$

- Soient (u_n) et (v_n) deux suites à valeurs dans un espace vectoriel normé E.

  On dit que u et v sont équivalentes et on écrira $u_n \sim v_n$, si et seulement si $u_n - v_n = o(\|u_n\|)$.

Si u admet une limite ℓ dans E et si $v \sim u$, alors v converge et admet la même limite ℓ.

Soient (u_n) et (v_n) deux suites *à valeurs dans* $\mathbb{K}$. Si $v_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ou au moins à partir d'un certain rang), il y a équivalence entre

(a) $u \sim v$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$

(c) il existe une suite (ε_n) à valeurs dans $\mathbb{K}$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ et $u_n = v_n(1+\varepsilon_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ce résultat permet de montrer facilement que la relation $\sim$ est bien une relation d'équivalence dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

▷ *Propriétés de o et $\mathcal{O}$:*

Soient (u_n) et (v_n) des suites à valeurs dans un espace vectoriel normé E, λ et μ des scalaires et (α_n), (β_n), (α'_n), (β'_n) des suites à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Si $u_n = \mathcal{O}(\alpha_n)$ et $v_n = \mathcal{O}(\alpha_n)$, alors $\lambda u_n + \mu v_n = \mathcal{O}(\alpha_n)$
2. Si $u_n = \mathcal{O}(\alpha_n)$ et $\alpha_n = \mathcal{O}(\alpha'_n)$, alors $u_n = \mathcal{O}(\alpha'_n)$
3. Si $u_n = \mathcal{O}(\alpha_n)$ et $\beta_n = \mathcal{O}(\beta'_n)$, alors $\beta_n u_n = \mathcal{O}(\alpha_n \beta'_n)$
4. Si $u_n = o(\alpha_n)$, alors $u_n = \mathcal{O}(\alpha_n)$
5. Si $u_n = o(\alpha_n)$ et $v_n = o(\alpha_n)$, alors $\lambda u_n + \mu v_n = o(\alpha_n)$
6. Si $u_n = o(\alpha_n)$ et $\alpha_n = o(\alpha'_n)$, alors $u_n = o(\alpha'_n)$
7. Si $u_n = o(\alpha_n)$ et $\beta_n = o(\beta'_n)$, alors $\beta_n u_n = o(\alpha_n \beta'_n)$
8. Si $u_n = o(\alpha_n)$ et si (λ_n) est une suite bornée de scalaires, alors $\lambda_n u_n = o(\alpha_n)$
9. $u_n = \mathcal{O}(1) \Longleftrightarrow (u_n)$ est bornée
10. $u_n = o(1) \Longleftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$
11. $u_n = \mathcal{O}(0) \Longleftrightarrow u_n = o(0) \Longleftrightarrow (u_n)$ est nulle à partir d'un certain rang.

▷ *Propriétés de $\sim$:*

Soient (u_n), (v_n), (w_n) et (x_n) des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$.

1. Si $u_n \sim w_n$ et si $v_n = o(w_n)$, alors $u_n + v_n \sim w_n$.
2. Si $u_n \sim w_n$, si $v_n \sim w_n$ et $\underline{\text{si } \lambda + \mu \neq 0}$, alors $\lambda u_n + \mu v_n \sim (\lambda+\mu) w_n$ (*on peut donc additionner les équivalents sous certaines conditions...*).
3. Si $u_n \sim w_n$ et $v_n \sim x_n$ alors $u_n v_n \sim w_n x_n$.
4. Si (u_n) et (v_n) sont à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et si $u_n \sim v_n$, alors $u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$ pour tout réel α.
5. Si (u_n) et (v_n) sont à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, si $u_n \sim v_n$ et si (u_n) (ou (v_n)) a une limite *différente de* 1 (éventuellement $+\infty$), alors $\ln u_n \sim \ln v_n$.

   Lorsque (u_n) tend vers 1, cette propriété tombe en défaut ; on a alors simplement, compte tenu de l'équivalent de $\ln$ au voisinage de 1, $\ln u_n \sim u_n - 1$