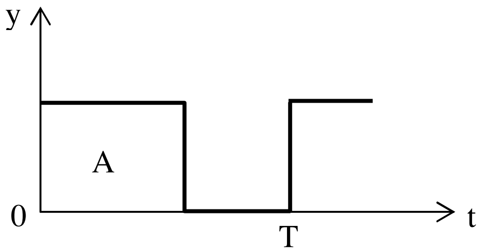
GRANDEURS PERIODIQUES
CIRCUITS LINEAIRES EN REGIME SINUSOIDAL

I. Propriétés des grandeurs périodiques



La valeur moyenne d'une grandeur périodique de période T, notée < y >, est définie par :

$$\boxed{< y > = \frac{1}{T}\int_0^T y(t)\,dt = \frac{A}{T}}$$

avec A : aire comprise entre le signal et l'axe des temps pendant la période T.
Remarque : si le signal est alternativement positif et négatif sur la période T, l'aire A est égale à : $A = A_1 - A_2$ avec A_1 l'aire au dessus de la courbe et A_2 l'aire en dessous.

– La valeur efficace d'une grandeur périodique de période T, notée Y, est définie par :

$$\boxed{Y = \sqrt{< y^2 >}\text{, avec } < y^2 > = \frac{1}{T}\int_0^T y^2(t)\,dt}$$

Remarque : pour des signaux carrés ou triangles, on peut calculer la valeur efficace par la méthode des aires. Pour cela :

- On élève l'amplitude du signal au carré. On représente $y^2 = f(t)$.
- On calcule sa valeur moyenne par la méthode des aires : $< y^2 > = \frac{A}{T}$.
- On extrait la racine carrée du résultat : $\sqrt{< y^2 >} = Y$.

II. Régime sinusoïdal

– Valeur instantanée d'une tension sinusoïdale :

$$\boxed{u(t) = U_{max} \sin(\omega t + \varphi_u)}$$

avec $\omega = 2\pi f$ ($rad.s^{-1}$) pulsation de la tension et U_{max} son amplitude. φ_u est la phase de la tension à l'origine.
– Valeur moyenne et efficace d'une tension sinusoïdale :

$$\boxed{< u > = 0 \text{ et } U = \frac{U_{max}}{\sqrt{2}}}$$

Remarques :

- La valeur instantanée d'une tension sinusoïdale s'écrit aussi :

$$u(t) = U\sqrt{2}\,\sin(\omega t + \varphi_u)$$

- Les définitions précédentes sont valables quelle que soit la nature de la grandeur sinusoïdale.

- Les différentes puissances en régime sinusoïdal sont :

– $P = U\,I\cos\varphi$: puissance active (W) ;
– $Q = U\,I\sin\varphi$: puissance réactive (VAR) ;
– $S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2}$: puissance apparente (VA) ;
– $\cos\varphi = \dfrac{P}{S}$: facteur de puissance.

Théorème de Boucherot : les puissances actives et réactives absorbées par un groupement de récepteurs sont respectivement égales à la somme des puissances actives et réactives absorbées par chaque récepteur.

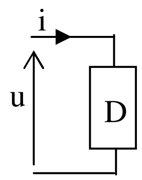
III. Etude des circuits linéaires

– Un circuit est dit linéaire s'il est uniquement formé de dipôles linéaires (dipôles R, L et C par exemple).
– Les lois du courant continu sont applicables aux régimes variables, à condition de les écrire en valeurs instantanées : par exemple les lois des nœuds ou des mailles.
– En régime sinusoïdal, l'étude des circuit se fait en appliquant les lois du continu aux valeurs instantanées ou à leurs grandeurs associées : nombres complexes (diviseur de tension ou de courant, théorèmes de Thèvenin, de Norton et de superposition) et vecteurs de Fresnel (solutions graphiques).

1. Etude

A chaque grandeur sinusoïdale (tension ou courant) on peut associer un vecteur de Fresnel et un nombre complexe. Par exemple à la tension $u = U\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi_u)$, on associe le vecteur $\vec{U} = \left[\|\vec{U}\|\,;\varphi_u\right]$ et le nombre complexe $\underline{U} = [U\,;\varphi_u]$ (en notation polaire).
Le module du nombre complexe $\underline{U}$ est sa valeur efficace U, et son argument est sa phase à l'origine φ_u.

2. Impédance d'un dipôle linéaire



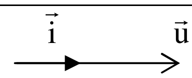
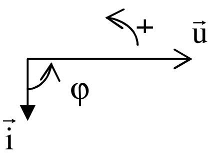
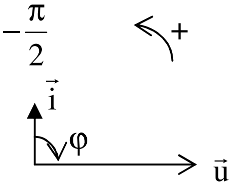
$$\boxed{\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = [Z\,;\varphi] = R + jX}$$

avec :

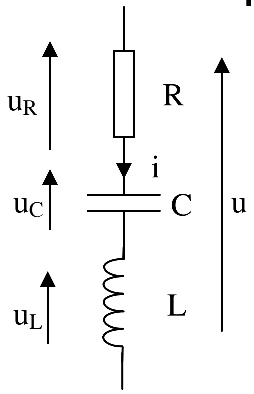
- le module de $\underline{Z}$ noté Z égal à : $Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \dfrac{U}{I}$;
- l'argument de $\underline{Z}$ noté φ (qui représente le déphasage $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ du courant par rapport à la tension à l'alimentation du dipôle) donné par la relation : $\tan\varphi = \dfrac{X}{R}$.

Remarque : on définit l'admittance complexe $\underline{Y}$ comme l'inverse de l'impédance $\underline{Z}$: $\underline{Y} = \dfrac{1}{\underline{Z}}$.

3. Cas des dipôles élémentaires

Composants	Relations	Impédances	Puissances	Diagrammes de Fresnel
Résistance	$\underline{U} = R\underline{I}$	$\underline{Z} = R = [R\ ;\ 0]$	$P = RI^2$ $Q = 0$	$\varphi = 0$ 
Inductance	$\underline{U} = jL\omega\underline{I}$	$\underline{Z} = jL\omega = \left[L\omega ; \frac{\pi}{2}\right]$	$P = 0$ $Q = L\omega I^2$	$\varphi = \frac{\pi}{2}$ 
Capacité	$\underline{U} = \frac{\underline{I}}{jC\omega}$	$\underline{Z} = \frac{1}{jC\omega} = \left[\frac{1}{C\omega} ; -\frac{\pi}{2}\right]$	$P = 0$ $Q = -U^2C\omega$	$\varphi = -\frac{\pi}{2}$ 

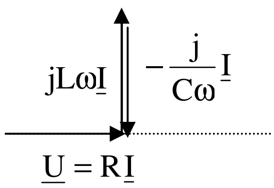
4. Cas d'une association de dipôles élémentaires RLC série, résonance



$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_C + \underline{U}_L$$

$$\underline{U} = \left(R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega})\right)\underline{I}$$

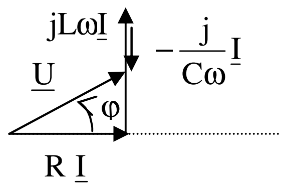
L'étude du circuit se fait suivant trois cas :



$L\omega = \frac{1}{C\omega}$

$\varphi = 0$

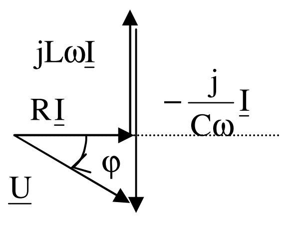
dipôle résistif :
résonance :
le courant est
minimum



$L\omega > \frac{1}{C\omega}$

$\varphi > 0$

dipôle inductif



$L\omega < \frac{1}{C\omega}$

$\varphi < 0$

dipôle capacitif

Diagramme de Fresnel

IV. Régime périodique quelconque

Tout signal périodique y(t) de fréquence f est décomposable en une somme de sinusoïdes de fréquences multiples de f et d'un terme constant égal à sa valeur moyenne :

$$\boxed{y(t) = \langle y \rangle + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right) = \langle y \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} Y_{n\,max} \sin(n\omega t + \varphi_n)}$$

avec :

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T y(t)\cos(n\omega t)dt \qquad \text{et} \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T y(t)\sin(n\omega t)dt$$

On peut également utiliser le changement de variable $\theta = \omega t$ et les expressions deviennent :

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} y(\theta)\cos(n\theta)d\theta \qquad \text{et} \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} y(\theta)\sin(n\theta)d\theta$$

Remarques :

– si y(t) est paire, tous les b_n sont nuls ;
– si y(t) est impaire, tous les a_n sont nuls ;
– le terme $Y_{n\,max}\sin(n\omega t + \varphi_n)$ est une sinusoïde de fréquence nf et est appelé harmonique de rang n. Son amplitude a pour expression : $Y_{n\,max} = \sqrt{2}Y_n$ avec Y_n sa valeur efficace. φ_n est la phase par rapport à l'origine ;
– l'harmonique de rang 1 (de même fréquence que le signal) est aussi appelé fondamental ;
– cette décomposition est appelée décomposition en séries de Fourier ;
– on pose aussi $y_{alt} = \sum_{n=0}^{\infty} Y_{n\,max}\sin(n\omega t + \varphi_n)$. On a alors : $y = \langle y \rangle + y_{alt}$. y_{alt} est la composante alternative de y, sa valeur moyenne est nulle.

- Valeur moyenne : il faut utiliser la définition.
- Valeur efficace : pour calculer rigoureusement la valeur efficace, il faut utiliser la définition. Si l'on connaît les termes de la décomposition en série de Fourier, on peut utiliser la relation suivante :

$$\boxed{Y = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} Y_n^2}}$$

  n = 0 correspond à la valeur moyenne de y(t)
- Impédance et diagramme de Fresnel : on peut parler d'impédance, associer des grandeurs complexes et diagrammes de Fresnel à chaque harmonique (mais pas au signal). Ex : pour l'harmonique de rang n, l'impédance complexe associée à une inductance est $jnL\omega$. On parlera de résonance pour un harmonique particulier.
  Les différentes puissances en régime périodique monophasé sont :

– $P = \overline{U}.\overline{I} + \sum_{n=1}^{\infty} U_n I_n \cos\varphi_n$: puissance active (W) ;

– $Q = \sum_{n=1}^{\infty} U_n I_n \sin\varphi_n$: puissance réactive (VAR) ;

– $S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2 + D^2}$: puissance apparente (VA), D est la puissance déformante ;

– $F_p = \dfrac{P}{S}$: facteur de puissance.

Avec $\overline{U}, \overline{I}$: valeurs moyennes de u(t) et i(t) ; U, I : valeurs efficaces de u(t) et i(t), U_n, I_n : valeurs efficaces des harmoniques de rang n de u(t) et i(t) et φ_n le déphasage entre les harmoniques de rang n de la tension et du courant.

- Cas particuliers :

– u ou i est continu, $P = \langle u \rangle \langle i \rangle$; $Q = 0$.

– u est sinusoïdale, $P = UI_1 \cos \varphi_1$, $Q = UI_1 \sin \varphi_1$.

- Taux de distorsion harmonique : $d_f = \dfrac{\sqrt{Y^2 - Y_1^2}}{Y_1}$ (exprimé en %). Si le signal est sinusoïdal, d_f est nul.

REGIMES TRANSITOIRES
1^{er} ET 2^{d} ORDRE

I. Introduction

Les grandeurs (tension, courant ou vitesse) d'un système électronique ou électromécanique (machines électriques) n'évoluent pas instantanément d'un point de fonctionnement à un autre. Ces états de transitions sont appelés régimes transitoires.
Les grandeurs respectent les lois du système et sont régies par des équations différentielles linéaires à coefficients constants. Si l'équation est du premier ordre, le régime transitoire est dit du 1^{er} ordre, et si l'équation différentielle est du deuxième ordre le régime transitoire est dit du 2^{n} ordre.

II. Régime transitoire du 1^{er} ordre

1. Rappels mathématiques

a) Fonction

Si la fonction y (tension, courant ou vitesse) est régie par une équation différentielle du type :

$$\tau\frac{dy}{dt} + y = z$$

z étant de même nature que y, alors :

$$\boxed{y = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + z}$$

y comporte deux termes, l'un associé au régime transitoire qui disparaît au bout de 5τ, l'autre étant la valeur de y en régime permanent.

Remarques :

– Si z est une constante alors y prendra la valeur de cette constante en régime permanent (ex : on charge un condensateur sous une tension E, au bout d'un certain temps, la tension aux bornes de ce condensateur sera E).

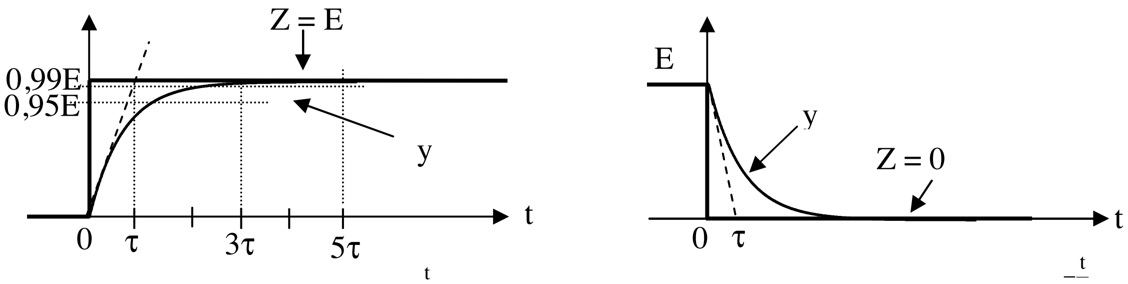
– A dépend de la valeur de y à l'origine (y(0)), appelée condition initiale : $y(0) = A + z$.

– τ est la constante de temps. Elle caractérise la rapidité du système (il est d'autant plus rapide que la constante de temps est faible).

– Au bout de 3τ, on a atteint 95% du régime permanent, 99% au bout de 5τ (on se considère alors en régime permanent).

– Mise sous cette forme, on dit que l'équation est sous sa forme canonique. On ne connaît les solutions de l'équation uniquement, si elle est sous sa forme canonique.

b) Réponse à un échelon



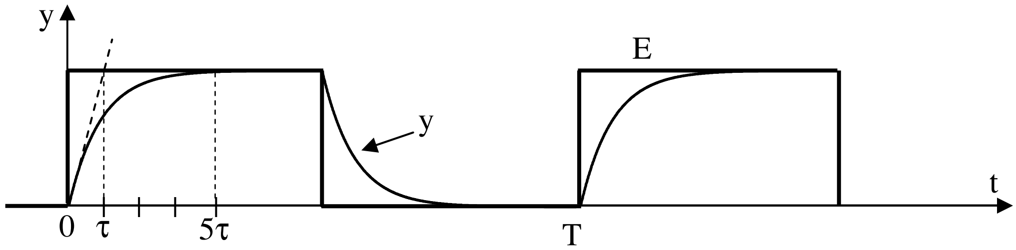
$y(0) = 0 \; ; y(t) = -Ee^{-\frac{t}{\tau}} + E$ $\qquad$ $y(0) = E \; ; \; y(t) = Ee^{-\frac{t}{\tau}}$

Réponse à deux types d'échelon

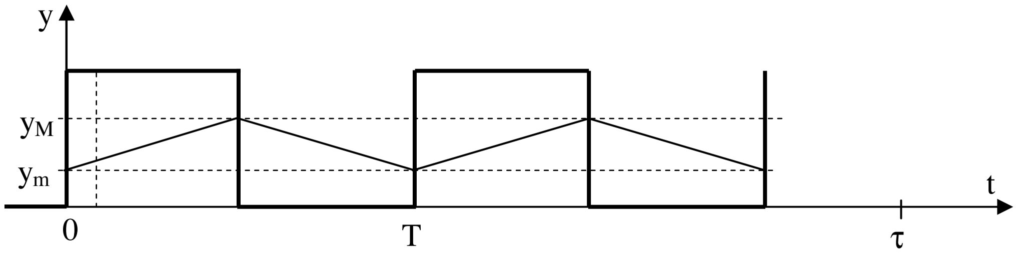
c) Créneau de période T

Réponse à un créneau de période T : il s'agit en fait d'associer deux échelons. Deux cas se présentent, $T > \tau$ et $T << \tau$.

• $T > \tau$



• $T << \tau$, ce qui correspond à résoudre une équation simplifiée du type : $K\frac{dy}{dt} = A$.



Réponse à une attaque en créneau

d) Méthode de résolution de problèmes impliquant des transitoires du premier ordre

α. Ecrire la loi des mailles et les relations entre les grandeurs courant, tension et vitesse pour chacun des cas considérés. Ecrire l'équation différentielle qui régit les grandeurs du circuit.

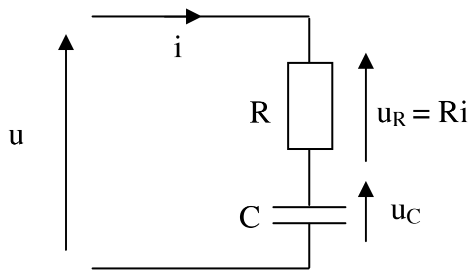
β. En déduire l'équation différentielle qui régit les grandeurs du circuit et la mettre sous la forme canonique.

δ. Déterminer la solution suivant la nature de z à l'aide des conditions initiales (une suffit pour un premier ordre).

χ. Tracer l'allure de la réponse.

Nous allons mettre cela en application dans les 3 cas suivants : circuit RC, circuit RL, machine à courant continu.

2. Application au circuit RC



• 1ère étape : loi des mailles, propriétés du circuit

$$\begin{cases} u = u_R + u_C \\ i = \dfrac{dq}{dt} \\ q = Cu_C \end{cases}$$

• 2ème étape : en déduire l'équation différentielle et la mettre sous sa forme canonique

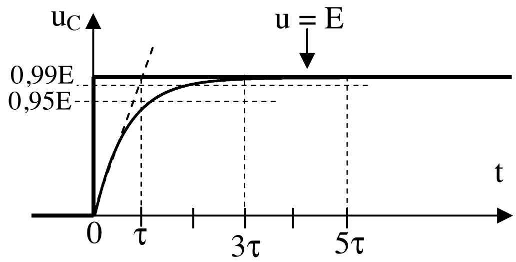
– pour u_C

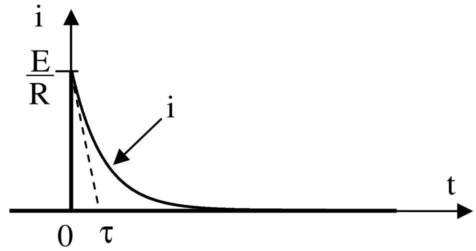
$$u = u_R + u_C = R\frac{dq}{dt} + u_C = RC\frac{du_C}{dt} + u_C$$

– pour i : sachant que $i = C\frac{du_c}{dt}$, on déterminera i après avoir déterminé u_C.

• 3ème étape : détermination de la solution suivant la nature de la tension u et des conditions initiales

1er cas : le condensateur est initialement déchargé ($u_C(0) = 0$) et on le charge sous la tension E (constante) : c'est une réponse à un échelon



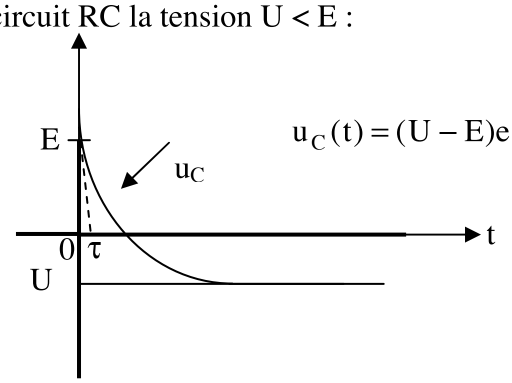


$u_C(0) = 0$

$$u_C(t) = -Ee^{-\frac{t}{\tau}} + E$$

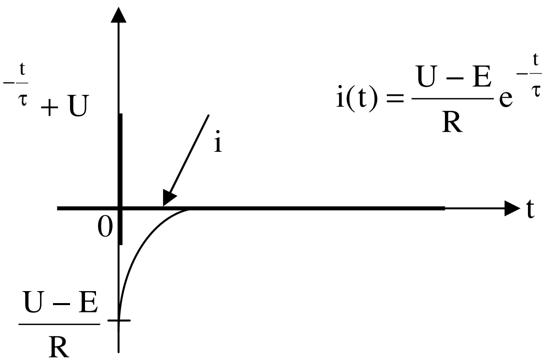
$$i(t)=\frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

2ème cas : le condensateur est initialement chargé ($u_C(0) = E$) et on applique aux bornes du circuit RC la tension U < E :



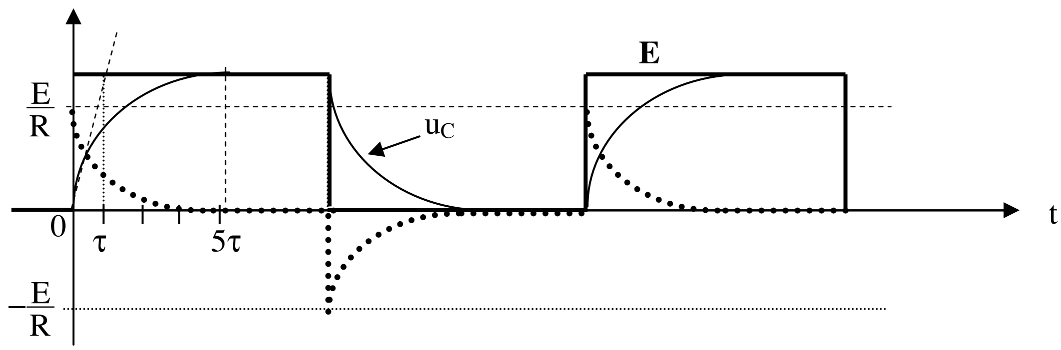
$$u_C(t) = (U - E)e^{-\frac{t}{\tau}} + U$$

$$i(t) = \frac{U - E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

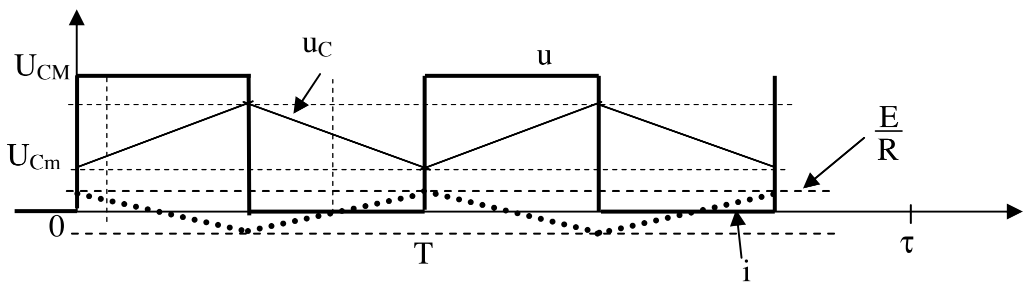


3ème cas : on applique une tension créneau

α) T > τ



β) T >> τ



Réponse en courant et tension d'un circuit RC à une attaque en créneau