Thème 1 - Espaces vectoriels et applications linéaires

Dans toute la suite, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

[S1.1] Définition d'un espace vectoriel

- Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est un triplet $(E, + , .)$, où E est un ensemble muni :
  - d'une loi de composition interne sur E, notée $+$, telle que $(E,+)$ soit un groupe abélien, c'est-à-dire :
    (i) la loi $+$ est une application de $E \times E$ dans E (loi interne) : $\forall\,(x,y) \in E^2,\ x + y \in E$;
    (ii) la loi $+$ est associative : $\forall\,(x,y,z) \in E^3,\ (x + y) + z = x + (y + z)$;
    (iii) la loi $+$ est commutative : $\forall\,(x,y) \in E^2,\ x + y = y + x$;
    (iv) la loi $+$ possède un élément neutre, noté 0_E : $\forall\, x \in E,\ x + 0_E = x$;
    (v) tout élément x de E possède un symétrique pour la loi $+$, noté $-x$: $x + (-x) = 0_E$.
  - d'une loi de composition externe sur $\mathbb{K}$, notée . , c'est-à-dire une application $\begin{cases} \mathbb{K} \times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda,x) & \longmapsto & \lambda.x \end{cases}$ vérifiant les propriétés suivantes :

$$\forall\,(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall\,(x,y) \in E^2,\ \begin{cases} \text{(i)} & 1_{\mathbb{K}}.x = x\,; \\ \text{(ii)} & \lambda.(x + y) = \lambda.x + \lambda.y\,; \\ \text{(iii)} & (\lambda + \mu).x = \lambda.x + \mu.x\,; \\ \text{(iv)} & \lambda.(\mu.x) = (\lambda\mu).x\,. \end{cases}$$

- **Exemples**

  Il est important de connaître un certain nombre d'espaces vectoriels classiques.
  - $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
  - $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel pour les lois usuelles.
  - Si D est un ensemble quelconque et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, l'ensemble $\mathcal{A}(D,E)$ des applications de D dans E peut être muni d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les lois.

    $$(f,g) \mapsto f + g \text{ avec : } \forall\, x \in D,\ (f + g)(x) = f(x) + g(x)\,;$$
    $$(\lambda,f) \mapsto \lambda.f \text{ avec : } (\lambda.f)(x) = \lambda.f(x)\,.$$

    En particulier, l'ensemble $E^{\mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
  - $\mathbb{K}[X]$, ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
  - $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, ensemble des matrices à p lignes et q colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

[S1.2] Espace vectoriel produit

Soient $E_1, E_2, \dots, E_p$ p $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
L'ensemble produit $E = E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les lois définies par :

$$\begin{aligned}(x_1,x_2,\dots,x_p) + (y_1,y_2,\dots,y_p) &= (x_1+y_1,x_2+y_2,\dots,x_p+y_p)\,;\\ \lambda.(x_1,x_2,\dots,x_p) &= (\lambda x_1,\lambda x_2,\dots,\lambda x_p)\,.\end{aligned}$$

Muni de ces lois, E s'appelle l'espace vectoriel produit des E_i. Le vecteur nul de E est le p-uplet $(0_{E_1},\dots,0_{E_p})$.

Exemple : $\mathbb{K}^p$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les lois définies ci-dessus.

[S1.3] Sous-espace vectoriel

- Soit $(E,+\,,.)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une *partie* F de E est appelée un sous-espace vectoriel de E si $(F,+\,,.)$ est encore un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

- **Caractérisations d'un sous-espace vectoriel**

  F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si F est une partie non vide de E stable par combinaisons linéaires, ce qui équivaut à :

  $$F \subset E, \quad F \neq \emptyset \quad \text{et} \quad \forall\,\lambda \in \mathbb{K}, \forall\,(x,y) \in F^2 \;:\; x+y \in F \text{ et } \lambda x \in F$$

  ou encore :

  $$F \subset E, \quad F \neq \emptyset \quad \text{et} \quad \forall\,\lambda \in \mathbb{K}, \forall\,(x,y) \in F^2 \;:\; \lambda x + y \;\in\; F\,.$$

  ✓ Il ne faut surtout pas oublier de vérifier que F est bien inclus dans E. Dans certains cas, il s'agit de la partie la plus délicate de la vérification.

  ✓ Pour montrer $F \neq \emptyset$, on vérifie en général que $0_E \in F$.

- **Exemples**

  Il existe un certain nombre de sous-espaces vectoriels classiques (donc d'espaces vectoriels) à connaître.

  - $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E (dits triviaux).
  - Si $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$, ensemble des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degré inférieur ou égal à n, est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

    ✓ Attention : l'ensemble des polynômes de degré *exactement* n n'est PAS un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$; en effet, il ne contient même pas le polynôme nul !

  - Si $P \in \mathbb{K}[X]$, l'ensemble $\mathbb{K}[X] \cdot P$ des multiples de P est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.
  - Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, l'ensemble $\mathscr{C}(I,\mathbb{R})$ des fonctions continues sur I à valeurs réelles est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(I,\mathbb{R})$.

[S1.4] Intersection de sous-espaces vectoriels

Si $(E_i)_{i\in I}$ est une famille quelconque de sous-espaces vectoriels de E, leur intersection $\bigcap\limits_{i\in I} E_i$ est encore un sous-espace vectoriel de E.

✓ La *réunion* de sous-espaces vectoriels de E n'est pas, en général, un sous-espace vectoriel de E.
Plus précisément, on peut démontrer que si A et B sont deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E, $A \cup B$ est encore un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $A \subset B$ ou $B \subset A$.

[S1.5] Sous-espace vectoriel engendré, combinaisons linéaires

- Soit X une partie quelconque d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

  L'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E qui contiennent X est encore un sous-espace vectoriel de E ; c'est en fait le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant X (au sens de l'inclusion) ; on l'appelle sous-espace vectoriel engendré par X, et on le note $\mathrm{Vect}(X)$.

- Si $X = \emptyset$, $\mathrm{Vect}(\emptyset) = \{0_E\}$. Sinon, $\mathrm{Vect}(X)$ est exactement l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de X, c'est-à-dire les éléments de la forme :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}^* \text{ et } \lambda_i \in \mathbb{K},\, x_i \in X \text{ pour tout } i\,.$$

✓ Par définition, une combinaison linéaire est toujours une somme *finie*.

✓ Le résultat précédent montre, en particulier, que l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs d'une partie de E est un sous-espace vectoriel de E. Cela peut être utile pour abréger certaines démonstrations.

[S1.6] Famille génératrice

Une famille $(x_i)_{i\in I}$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est dite génératrice de E si le sous-espace vectoriel qu'elle engendre est égal à l'espace E tout entier :

$$E = \mathrm{Vect}\big((x_i)_{i\in I}\big)\,,$$

c'est-à-dire si tout vecteur de E est combinaison linéaire des x_i.
Toute famille contenant une famille génératrice de E est encore génératrice de E.

[S1.7] Dépendance et indépendance linéaire

- Une famille finie $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est dite libre s'il n'existe pas de relation de dépendance linéaire non triviale entre ces vecteurs, c'est-à-dire si, pour toute famille $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ d'éléments de $\mathbb{K}$:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0_E \implies \forall\, i \in [\![1\,;n]\!],\ \lambda_i = 0_{\mathbb{K}}$$

  (on dit aussi que les x_i sont linéairement indépendants).

- Une famille quelconque $(x_i)_{i\in I}$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est dite libre si *toutes* ses sous-familles finies sont libres.

  Exemple : dans $\mathbb{K}[X]$, toute famille de polynômes non nuls de degrés distincts est libre.

- Une famille finie $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est dite liée si elle n'est pas libre, c'est-à-dire s'il existe une famille $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ d'éléments de $\mathbb{K}$, *non tous nuls*, telle que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i = 0_E$ (on dit aussi que les x_i sont linéairement dépendants).

- **Propriétés**

  - Une famille réduite à un élément $\{x\}$ est libre si et seulement si $x \neq 0_E$.
  - Toute famille contenant 0_E est liée.
  - Toute sous-famille d'une famille libre est libre. Toute famille contenant une famille liée est liée.
  - Une famille $(x_i)_{i\in I}$ est liée si et seulement si il existe $j \in I$ tel que x_j soit combinaison linéaire des $(x_i)_{i\in I, i\neq j}$.
    Une famille $(x_i)_{i\in I}$ est libre si aucun des x_i n'est combinaison linéaire des autres.

[S1.8] Bases

Une famille $\mathscr{B}$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E s'appelle une base de E si elle est à la fois libre et génératrice de E.

Cela équivaut à dire que tout vecteur x de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des éléments de $\mathscr{B}$. Les coefficients de cette combinaison linéaire sont les coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$.

[S1.9] Somme de sous espaces vectoriels

Soit $(E_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de n sous-espaces vectoriels de E $(n \in \mathbb{N}^*)$.

On appelle somme des E_i, et on note $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} E_i$, l'ensemble des vecteurs de la forme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$, où $x_i \in E_i$ pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$.

C'est aussi le sous-espace vectoriel de E engendré par la réunion des E_i, c'est-à-dire le plus petit sous-espace vectoriel de E qui contient tous les E_i :

$$\sum_{i=1}^{n} E_i = \mathrm{Vect}\Big(\bigcup_{1\leqslant i\leqslant n} E_i\Big).$$

✓ Les deux caractérisations précédentes de la somme de sous-espaces sont utiles et doivent toutes deux être sues.
Cependant, on prendra soin de ne pas confondre la *réunion*, qui est une notion ensembliste, et la *somme* de sous-espaces vectoriels.

Exemple : si $x_1,\dots,x_n$ sont n vecteurs de E, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\mathbb{K}.x_i = \mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_n)$.

[S1.10] Somme directe de sous-espaces vectoriels

- Soit $(E_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de n sous-espaces vectoriels de E.

  On dit que la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} E_i$ est directe lorsque pour tout $x \in \displaystyle\sum_{i=1}^{n} E_i$ l'écriture $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$ avec $x_i \in E_i$ pour tout i est *unique*. On note alors : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} E_i = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.

  Exemple : si $x_1,\dots,x_n$ sont n vecteurs *non nuls* de E, dire que la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{K}.x_i$ est directe équivaut à dire que la famille $(x_1,\dots,x_n)$ est libre.

- **Caractérisations d'une somme directe**

  - Pour que la somme $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant n} E_i$ soit directe, il faut et il suffit que pour toute famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ avec $x_i \in E_i$ pour tout i on ait :

  $$\sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \implies \forall\, i \in [\![1\,;n]\!],\ x_i = 0\,.$$

  ✓ Il s'agit de la caractérisation la plus simple à utiliser pour montrer que n sous-espaces vectoriels sont en somme directe dès que $n \geqslant 3$.

  - Pour que la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} E_i$ soit directe, il faut et il suffit qu'il existe $j \in [\![1\,;n]\!]$ tel que $\displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ i\neq j}} E_i$ soit directe et que $\displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ i\neq j}} E_i$ et E_j soient en somme directe (et dans ce cas, cette propriété est vraie pour tout $j \in [\![1\,;n]\!]$).

  ✓ Cette caractérisation est moins utilisée, mais elle peut être pratique dans des démonstrations par récurrence.

- **Somme directe de deux sous-espaces**

  Dans le cas de *deux* sous-espaces vectoriels (et dans ce cas seulement), on a une caractérisation plus simple. En effet, pour que la somme de deux sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 de E soit directe, il faut et il suffit que $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$.

- **Sous-espaces supplémentaires**

  Les sous-espaces vectoriels E_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ de E sont dits supplémentaires si $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{n} E_i$. Cela équivaut à dire que tout vecteur $x \in E$ s'écrit de manière unique sous la forme $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$ avec $x_i \in E_i$ pour tout i.

  Exemple : si $x_1,\dots,x_n$ sont n vecteurs *non nuls* de E, dire que $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{K}.x_i$ équivaut à dire que la famille $(x_1,\dots,x_n)$ est une base de E.

- **Base adaptée à une décomposition en somme directe**

  - Soit $(E_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E telle que $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.

    Si, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $\mathscr{B}_i$ est une base de E_i, alors les $\mathscr{B}_i$ sont deux à deux disjointes et $\mathscr{B} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathscr{B}_i$ est une base de E.
  - Soit $\mathscr{B}$ une base de E, et $(\mathscr{B}_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une partition de $\mathscr{B}$.

    Si, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $E_i = \mathrm{Vect}(\mathscr{B}_i)$, alors $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.

[S1.11] Espaces vectoriels de dimension finie

- On dit qu'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est de dimension finie s'il possède une famille génératrice finie.
- **Théorème de la base incomplète**

  Soient L une famille libre et G une famille génératrice de E, espace vectoriel de dimension finie.

  Alors il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que : $L \subset \mathscr{B} \subset L \cup G$ (*autrement dit, on peut compléter L à l'aide de vecteurs de G pour obtenir une base*).

  On en déduit que tout espace vectoriel de dimension finie E possède (au moins) une base (dans le cas où $E = \{0\}$, on peut convenir qu'une base de E est $\emptyset$).
- **Dimension**

  Toutes les bases d'un espace vectoriel E de dimension finie ont le même nombre d'éléments, appelé la dimension de E, notée $\dim_{\mathbb{K}} E$ ou plus simplement $\dim E$.
- **Caractérisation des bases**

  Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

  – Toute famille libre de E a moins de n éléments ; et si elle en a exactement n, c'est une base de E.

  – Toute famille génératrice de E a plus de n éléments ; et si elle en a exactement n, c'est une base de E.

  Exemple : toute famille de polynômes de degrés échelonnés de 0 à n est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
- **Dimension d'un espace vectoriel produit**

  Soient $E_1, E_2, \ldots, E_p$ p $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies.

  Alors l'espace vectoriel produit $E = E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_p$ est de dimension finie et $\dim E = \sum_{i=1}^{p} \dim(E_i)$.

[S1.12] Dimension d'un sous-espace vectoriel

- Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et soit F un sous-espace vectoriel de E.
  - F est de dimension finie, et $\dim F \leqslant \dim E$.
  - De plus, si $\dim E = \dim F$, alors $F = E$.
- **Rang d'une famille**

  Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

  Si le sous-espace vectoriel qu'elle engendre est de dimension finie, on définit le rang de la famille $(x_i)_{i \in I}$ par :

$$\mathrm{rg}\big((x_i)_{i \in I}\big) = \dim\big(\mathrm{Vect}((x_i)_{i \in I})\big).$$

- **Propriétés**
  - Si E est de dimension finie, alors :

$$\mathrm{rg}\big((x_i)_{i \in I}\big) \leqslant \dim(E).$$

  - Si $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ est une famille finie, alors : $\mathrm{rg}(x_1, x_2, \dots, x_p) \leqslant p$.

[S1.13] Dimension de la somme de deux sous-espaces

- **Dimension d'un supplémentaire**

  Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
  - Tout sous-espace vectoriel de E possède (au moins) un supplémentaire.
  - Si $E = F \oplus G$, $\dim F + \dim G = \dim E$.
- **Formule de Grassmann**

  Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de dimensions finies de E. Alors $F + G$ est de dimension finie et :

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

- **Caractérisation de deux sous-espaces vectoriels supplémentaires**

  Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

  Pour que F et G soient supplémentaires, il faut et il suffit que :

$$F + G = E \quad \text{et} \quad \dim E = \dim F + \dim G$$

  ou bien que :

$$F \cap G = \{0_E\} \quad \text{et} \quad \dim E = \dim F + \dim G.$$

[S1.14] Dimension de la somme de n sous-espaces

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $(E_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E.

- **Dimension de la somme**

  On a l'inégalité : $\dim\left(\sum_{i=1}^{n} E_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \dim E_i$, et il y a égalité si et seulement si la somme est directe.

- **Caractérisation de sous-espaces vectoriels supplémentaires**

  Pour que les E_i soient supplémentaires, il faut et il suffit que :

$$\text{la somme } \sum_{i=1}^{n} E_i \text{ soit directe et que } \dim E = \sum_{i=1}^{n} \dim(E_i)$$

  ou bien que :

$$E = \sum_{i=1}^{n} E_i \quad \text{et} \quad \dim E = \sum_{i=1}^{n} \dim(E_i)\,.$$

[S1.15] Applications linéaires

- **Définitions**
  - Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Une application $u\colon E \to F$ est dite linéaire si :

$$\forall\,\lambda \in \mathbb{K},\ \forall\,(x,y) \in E^2,\ u(x+y) = u(x) + u(y) \quad \text{et} \quad u(\lambda x) = \lambda u(x)\,.$$

    On peut remplacer cette définition par :

$$\forall\,\lambda \in \mathbb{K},\ \forall\,(x,y) \in E^2,\ u(\lambda x + y) = \lambda u(x) + u(y)\,.$$

    Si u est linéaire, on aura plus généralement, pour toute famille de scalaires $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et toute famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de vecteurs de E :

$$u\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u(x_i)\,.$$

  - Un isomorphisme de E sur F est une application linéaire bijective de E sur F.
  - Un endomorphisme de E est une application linéaire de E dans lui-même.
  - Un automorphisme de E est un endomorphisme de E bijectif.
  - On note $\mathscr{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F, $\mathscr{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E et $\mathrm{GL}(E)$ celui des automorphismes de E.

- **Exemples**

  De même qu'il faut connaître certains espaces vectoriels de référence, il faut aussi connaître certaines applications linéaires classiques. Citons-en quelques-unes.