Jour n°1

Exercice 1.0

1) Étudier l'intégrabilité de $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x^2-1}}$ sur $]1,+\infty[$.

2) Étudier l'intégrabilité de $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x^2+1}$ sur $]0,+\infty[$.

Exercice 1.1

Soit f de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,+\infty[$ telle que f'' est intégrable sur $[0,+\infty[$ et telle que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ soit convergente.

1) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

2) Étudier les séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f'(n)$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f(n)$.

Exercice 1.2

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ $(n \geqslant 3)$ telle que, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $a_{k,n-k+1} = a$, les autres termes étant égaux à 1, et soit J la matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients sont égaux à 1.

1) Montrer qu'il existe b et c tels que $A^2 = bI_n + cJ$.

2) Exprimer A^4 en fonction de I_n et J.

3) A est-elle diagonalisable ?

4) $\boxed{\text{QS}}$ Déterminer les éléments propres de A.

Énoncé

1) Étudier l'intégrabilité de $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x^2-1}}$ sur $]1, +\infty[$.

2) Étudier l'intégrabilité de $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x^2+1}$ sur $]0, +\infty[$.

Analyse stratégique de l'énoncé

Il s'agit d'un exercice facile consistant à étudier l'intégrabilité d'une fonction sur un intervalle. Si nous avons choisi de corriger ces deux exercices qui font partie de la banque d'exercices publiée sur Internet, c'est parce qu'ils permettent d'illustrer les méthodes les plus utilisées pour étudier l'existence d'une intégrale. Et il y aura de toutes façons de nombreuses autres intégrales impropres dans cet ouvrage !

En premier lieu, il faut faire attention au vocabulaire employé par l'énoncé : dire que « f est intégrable sur I » signifie que l'intégrale $\displaystyle\int_I f$ est *absolument* convergente, c'est-à-dire que l'intégrale $\displaystyle\int_I |f|$ converge. Il s'agit donc d'une notion plus forte que la simple convergence de $\displaystyle\int_I f$. Cela peut parfois poser problème dans le cas où le signe de f varie, mais ce n'est pas le cas ici.

Les méthodes de base pour étudier la convergence d'une intégrale sont souvent les mêmes, et sont exposées en détail dans le formulaire qui suit. Si vous avez des difficultés pour résoudre ce genre d'exercices, nous vous conseillons d'essayer de suivre le plan donné afin d'avoir des repères et des idées sur la démarche à suivre.

$\hookrightarrow$ Il est vraiment indispensable de savoir prouver l'existence d'une intégrale impropre ; c'est l'une des questions les plus courantes en analyse, et on la rencontre dans de nombreuses situations. Avec un peu d'entraînement, vous devriez savoir résoudre ce type d'exercices en quelques minutes.

Corrigé

1) Soit $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x^2-1}}$ pour $x > 1$. On commence *déjà* par remarquer que f est définie et continue sur $]1, +\infty[$: en effet, x^2-1 est strictement positif sur cet intervalle, ce qui permet d'assurer l'existence de $f(x)$, et la continuité résulte des théorèmes usuels (plus précisément : $x \mapsto x^2-1$ est continue en tant que fonction polynôme, puis $x \mapsto \sqrt{x^2-1}$ l'est en tant que composée de fonctions continues, et enfin f est continue comme quotient de deux telles fonctions).

$\hookrightarrow$ Commencer l'étude d'une intégrale impropre en se précipitant sur l'étude aux bornes sans avoir auparavant étudié le domaine de définition et la continuité de la fonction à intégrer est une faute grave !

> <u>Rapport du jury 2010</u>
>
> Pour étudier l'existence de $\displaystyle\int_a^b f$, le réflexe général est de faire une étude générale en a et en b en délaissant le plus souvent la régularité de f. Cela conduit certains candidats à intégrer sans sourciller $t \mapsto \dfrac{1}{1-t}$ entre zéro et deux.

f étant continue sur $]1,+\infty[$, les problèmes d'intégrabilité ne se posent donc qu'au voisinage de 1^+ et de $+\infty$. Notons aussi que f est à valeurs positives, donc étudier son intégrabilité équivaut à démontrer la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

- *Au voisinage de* 1^+

  On commence par examiner la fonction pour se « débarrasser » des parties qui ne posent pas de problème. Ici, $\displaystyle\lim_{x\to 1} \mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{\mathrm{e}}$ donc on a $f(x) \underset{x\to 1^+}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{\sqrt{x^2-1}}$.

  Or, pour $x>1$, $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{(x-1)(x+1)} = \sqrt{x-1}\sqrt{x+1}$.

  Là encore, l'expression $\sqrt{x+1}$ ne pose pas de problème au voisinage de 1 puisque $\displaystyle\lim_{x\to 1}\sqrt{x+1} = \sqrt{2}$, et l'on a finalement : $f(x) \underset{x\to 1^+}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{\sqrt{2}\sqrt{x-1}}$.

  Or, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} = \dfrac{1}{(x-1)^{\frac{1}{2}}}$ est intégrable au voisinage de 1^+ : son intégrale est une intégrale de Riemann, de même nature que celle de $x \mapsto \dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$ au voisinage de 0^+, donc convergente ($\dfrac{1}{2} < 1$).

  Puisqu'il s'agit d'une fonction positive (critère à ne pas oublier !), les théorèmes de comparaison (ici, l'utilisation de fonctions équivalentes) assurent que f est aussi intégrable au voisinage de 1^+.

- *Au voisinage de* $+\infty$

  Là encore, on examine la fonction, pour remarquer que le terme le plus important ici est e^{-x}. Cela suggère d'utiliser une comparaison avec une fonction de Riemann.

  Plus précisément, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2 f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x} = 0$. Ainsi, $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$; puisque $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est positive et intégrable au voisinage de $+\infty$, il en est de même de f.

  (Un autre argument possible consiste à dire que $f(x) \underset{+\infty}{=} o(\mathrm{e}^{-x})$, et d'utiliser alors la comparaison avec la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$, qui fait aussi partie des fonctions de référence).

En rassemblant les deux cas, on obtient :

$$\boxed{f \text{ est intégrable sur }]1,+\infty[.}$$

2) Notons ici $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x^2+1}$ pour $x > 0$.

L'existence et la continuité de f sur $]0,+\infty[$ ne posent pas de problème (mais, rappelons-le, il ne faut pas oublier ce point !).

Les problèmes d'intégrabilité ne se posent donc qu'au voisinage de 0^+ et de $+\infty$. Notons aussi que f est de signe constant au voisinage de 0^+ et au voisinage de $+\infty$, donc étudier son intégrabilité équivaut à démontrer la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

- *Au voisinage de* 0^+

  Comme dans la question précédente, on examine d'abord la fonction pour voir ce qui est important au voisinage de 0^+. Ici, on a immédiatement $f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \ln x$; puisque la fonction ln est intégrable au voisinage de 0^+ (intégrale de référence) et qu'elle y est de signe constant, les théorèmes de comparaison assurent que f est aussi intégrable au voisinage de 0^+.

- *Au voisinage de* $+\infty$

  Là encore, on simplifie un peu le problème en remarquant que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln x}{x^2}\cdot$

  Il s'agit là d'une intégrale de Bertrand, dont l'étude est classique, et dont le principe général est indiqué dans le formulaire.

  L'étude de l'intégrabilité de cette fonction consiste à la comparer en $+\infty$ à une fonction de la forme $x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ avec $\alpha > 1$. Or $x^\alpha f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln x}{x^{2-\alpha}}$, donc si l'on choisit par exemple $\alpha = \dfrac{3}{2}$ (ou plus généralement α quelconque dans $]1,2[$), on aura, d'après les croissances comparées, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}} f(x) = 0$.

  Donc $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right)$; puisque $x \mapsto \dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ est positive et intégrable au voisinage de $+\infty$, il en est de même de f.

En rassemblant les deux cas, on obtient :

$$\boxed{f \text{ est intégrable sur }]0,+\infty[.}$$

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir de la démarche à suivre pour étudier une intégrale impropre, et des méthodes qui ont été utilisées dans les exercices ci-dessus, car elles sont représentatives de celles utilisées dans la grande majorité des cas.

↪ En particulier, il est très important lors de l'étude d'une fonction en un point d'arriver à déterminer la « partie » de la fonction qui est prépondérante.

Formulaire

- Étude d'une intégrale impropre

▷ *Plan général*

On expose ci-dessous un plan général, qui est évidemment à adapter à chaque cas.

Pour exposer ce plan, on se placera dans le cadre suivant : f est une fonction définie sur un intervalle $[a,b[$, avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Vous adapterez sans difficulté la méthode au cas d'une fonction définie sur un intervalle $]a,b]$ avec $-\infty \leqslant a < b < +\infty$. Dans le cas d'une fonction définie sur un intervalle ouvert $]a,b[$, rappelons que $\displaystyle\int_{]a,b[} f$ est dite convergente si et seulement si pour tout/un $c \in\ ]a,b[$, les deux intégrales $\displaystyle\int_{]a,c]} f$ et $\displaystyle\int_{[c,b[} f$ le sont ; le problème se ramène donc alors aux précédents.

1. Vérifier que f est bien continue par morceaux sur $[a,b[$, en particulier que $f(t)$ est bien défini pour tout $t \in [a,b[$. Ainsi, pour tout $c \in [a,b[$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^c f$ existe et, pour la suite, on peut se contenter d'examiner le comportement de f au voisinage immédiat de b.

2. *Dans le cas où l'on connaît une primitive* F de f (ce qui est loin d'être toujours le cas), il suffit d'examiner si $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = F(x) - F(a)$ possède une limite (finie) en b^-.

3. *Dans le cas où l'intervalle* $[a,b[$ *est borné* (c'est-à-dire b fini), on peut parfois utiliser le résultat suivant :

– Si f est bornée sur $[a,b[$, elle y est intégrable.

– Si f admet une limite finie en b^-, elle est intégrable (ce cas est un cas particulier du précédent).

L'intégrale est alors dite *faussement impropre*.

4. Dans le cas général, le signe de f au voisinage de b joue un rôle important :

◦ **Cas n° 1 :** f *a un signe constant au voisinage de* b.

Quitte à remplacer f par $-f$, on supposera ici f positive au voisinage de b.
Le principe de base consiste à comparer f, au voisinage de b, à une fonction de référence, dont on connaît l'intégrabilité. On utilise pour cela l'un des résultats suivants :

∗ Si $0 \leqslant f \leqslant g$ au voisinage de b et si g est intégrable au voisinage de b, il en est de même de f.

∗ Si $f \geqslant g \geqslant 0$ au voisinage de b et si l'intégrale de g diverge, il en est de même de celle de f.

* Si $f \underset{b}{=} o(g)$ ou $f \underset{b}{=} \mathcal{O}(g)$, et si g est *positive* intégrable au voisinage de b, il en est de même de f.
* Si $f \underset{b}{\sim} \lambda\, g$ avec g *positive* et λ constante non nulle, alors les intégrales de f et de g au voisinage de b sont de même nature.

$\hookrightarrow$ L'utilisation d'équivalents est la méthode à laquelle il faut penser en premier (ne serait-ce que mentalement). Ce n'est que lorsqu'elle a échoué que l'on peut penser à utiliser les « o » ou les « $\mathcal{O}$ », et en tout dernier lieu une inégalité.

La comparaison la plus fréquemment utilisée est celle avec les intégrales de Riemann $\displaystyle\int_0^a \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ ou $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$, elle est détaillée un peu plus loin.

- **Cas n° 2 :** *f n'a pas un signe constant au voisinage de b* (ou bien on ne connaît pas son signe).

  Ce cas est le plus difficile. Trois méthodes peuvent être utiles dans ce cas.

  * On peut étudier la convergence absolue de l'intégrale, en vertu du résultat suivant : si $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge, *alors* l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. On est ainsi ramené au cas précédent.
  * Dans le cas d'une intégrale de la forme $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{f(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ avec $\alpha > 0$, une intégration par parties en dérivant $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ permet de faire apparaître des termes en $\dfrac{1}{t^{\alpha+1}}$, avec ici $\alpha + 1 > 1$, ce qui, par comparaison à une intégrale de Riemann, peut permettre de conclure.
  * On peut aussi utiliser un développement limité de f au voisinage de b pour essayer d'écrire $f(t) \underset{t \to b^-}{=} g(t) + h(t)$; si les deux intégrales de g et de h convergent, il en sera de même de celle de f ; si l'une des intégrales est convergente et l'autre divergente, l'intégrale de f sera divergente.

En fait, dans beaucoup de cas, il n'est pas utile de connaître ou de préciser d'emblée le signe de f (sauf si l'on veut utiliser une inégalité). En effet :

- Si $f \underset{t \to b^-}{\sim} \lambda\, g$, où g est une fonction positive au voisinage de b et λ un réel non nul, le signe de f sera celui de λ au voisinage de b.
- Si $f \underset{t \to b^-}{=} o(g)$ ou $f \underset{t \to b^-}{=} \mathcal{O}(g)$, où g est *positive* et intégrable au voisinage de b, on a en fait, en revenant à la définition, $|f(t)| \leqslant kg(t)$ au voisinage de b avec k constante, et l'intégrale de f sera directement absolument convergente.

▷ *Comparaison avec une intégrale de Riemann*

Soit à étudier $\displaystyle\int_{[a,b[} f$, où f est continue par morceaux sur $[a,b[$. On cherche à comparer l'intégrale de f à une intégrale de la forme $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{(b-t)^\alpha}$ lorsque b est fini, ou à une intégrale de la forme $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ lorsque $b = +\infty$ et $a > 0$.

On supposera ici f *à valeurs positives.*

$\hookrightarrow$ La comparaison à une intégrale de Riemann est certainement la méthode la plus usitée, et la plus rapide, pour étudier une intégrale impropre. C'est celle à laquelle (sauf cas élémentaires) il faut penser en premier.

- Si l'on peut avoir directement un équivalent de f de la forme précédente, c'est fini ; on utilise alors directement l'un des deux résultats suivants.
  - ∗ Lorsque b est fini, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{(b-t)^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha < 1$.
  - ∗ Si $a > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.
- Sinon, la comparaison à une intégrale de Riemann se fait de façon un peu plus subtile.
  - ∗ Dans le cas où b est fini, on peut étudier $\displaystyle\lim_{t\to b^-} (b-t)^\alpha f(t)$.
    - S'il existe $\alpha < 1$ et ℓ fini tels que $\displaystyle\lim_{t\to b^-} (b-t)^\alpha f(t) = \ell$, alors, au voisinage de b, $f(t)$ sera majoré par $\dfrac{cste}{(b-t)^\alpha}$, donc f sera intégrable au voisinage de b (comparaison d'intégrales de fonctions positives).
    - S'il existe $\alpha > 1$ tel que $\displaystyle\lim_{t\to b^-} (b-t)^\alpha f(t) = +\infty$, alors, au voisinage de b, $f(t)$ sera minoré par $\dfrac{cste}{(b-t)^\alpha}$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ sera divergente.
  - ∗ Dans le cas $b = +\infty$, on peut étudier $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^\alpha f(t)$.
    - S'il existe $\alpha > 1$ et ℓ fini tels que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^\alpha f(t) = \ell$, alors, au voisinage de $+\infty$, $f(t)$ sera majoré par $\dfrac{cste}{t^\alpha}$, donc f sera intégrable au voisinage de $+\infty$ (comparaison d'intégrales de fonctions positives).
    - S'il existe $\alpha < 1$ tel que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^\alpha f(t) = +\infty$, alors, au voisinage de $+\infty$, $f(t)$ sera minoré par $\dfrac{cste}{t^\alpha}$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ sera divergente.

  $\hookrightarrow$ La méthode exposée ci-dessus s'utilise de préférence lorsqu'apparaît dans l'expression de f des exponentielles ou des logarithmes, qu'il est facile de comparer à t^α.

- Intégrales de Bertrand

Il s'agit d'intégrales impropres de la forme $\displaystyle\int_0^a \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha\,|\ln t|^\beta}$ (avec $0 < a < 1$) et $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$ (avec $a > 1$).

Les résultats concernant ces intégrales ne sont pas au programme mais la méthode d'étude est instructive et mérite d'être approfondie.

Cette méthode est la suivante.

* Dans le cas $\alpha = 1$, on peut calculer une primitive de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}\,|\ln t|^{-\beta}$ (car de la forme $u'\,u^{-\beta}$) ; on pourra donc conclure en cherchant les limites de cette primitive.
* Dans le cas $\alpha \neq 1$, on étudie $\lim\limits_{t\to 0^+} t^\gamma \dfrac{1}{t^\alpha\,|\ln t|^\beta}$ ou $\lim\limits_{t\to +\infty} t^\gamma \dfrac{1}{t^\alpha(\ln t)^\beta}$ (selon l'intégrale étudiée), avec γ réel compris strictement entre α et 1 ; selon les cas, cette limite est 0 ou $+\infty$ (à l'aide des résultats sur les croissances comparées des fonctions puissances et $\ln$), et l'on peut alors conclure en comparant, comme il a été expliqué ci-dessus, avec l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_0^a \frac{dt}{t^\gamma}$ ou $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^\gamma}$.

Vous pouvez vous entraîner à cette méthode pour démontrer les résultats suivants :

- Si $0 < a < 1$:

$$\boxed{\int_0^a \frac{dt}{t^\alpha\,|\ln t|^\beta} \text{ converge si et seulement si } \big[\alpha < 1 \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1)\big].}$$

- Si $a > 1$:

$$\boxed{\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha(\ln t)^\beta} \text{ converge si et seulement si } \big[\alpha > 1 \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1)\big].}$$

Rappelons que ce résultat est hors programme, et qu'il faut savoir le redémontrer sur des cas particuliers, comme cela a été fait dans le deuxième des exercices précédents.

- <u>Intégrales de référence</u>

- <u>Fonctions de Riemann</u>

Il s'agit des fonctions $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ pour $t > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

En utilisant une primitive d'une telle fonction, on obtient facilement les résultats suivants :

* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
* $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.
* Et plus généralement, si a et b sont des réels tels que $a < b$, alors :

$$\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha} \qquad \text{converge si et seulement si } \alpha < 1.$$

- <u>Exponentielle et logarithme</u>

* $\displaystyle\int_0^1 \ln t\,dt$ converge (et $\displaystyle\int_0^1 \ln t\,dt = -1$).
* $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at}\,dt$ converge si et seulement si $a > 0$ (et dans ce cas $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at}\,dt = \frac{1}{a}$).