Chapitre 1 :
METHODOLOGIE

I. Calculer avec les fractions et les racines

1. Calcul avec les fractions

Soient *a, b, c* et *d* des entiers relatifs, avec *b* et *d* non nuls.

Addition de même dénominateurs : $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$

Simplification : $\frac{a}{b}=\frac{ad}{bd}$

Addition de dénominateurs différents $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$

Multiplication : $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$

Division : $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$ $(c\neq 0)$

Remarque : il ne s'agit ici que de formules. Pour les appliquer, il faudra passer par des simplifications de fractions et la recherche d'un dénominateur commun, si possible, plus petit que le produit des deux dénominateurs. Ces compétences seront développées dans le chapitre « arithmétique ». En effet, le plus petit dénominateur commun est en fait le ppcm des dénominateurs, quand ceux-ci sont des entiers.

2. Calcul avec les racines carrées

Soient *a* et *b* deux réels positifs.

$$\left(\sqrt{a}\right)^2=a \qquad \sqrt{a^2}=a$$

$$\sqrt{a\times b}=\sqrt{a}\times\sqrt{b} \qquad \sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\ (b\neq 0)$$

⚠ Remarque : $\sqrt{a+b}\neq\sqrt{a}+\sqrt{b}$

3. Egaler deux expressions

Cet exercice, connu depuis le collège, reste un exercice difficile à mettre en forme. Nous souhaitons montrer qu'une expression A est égale à une expression B. Trois méthodes s'offrent principalement à nous :

- Effectuer la différence A − B, afin de trouver zéro.
- Partir de l'expression A et la modifier de sorte d'obtenir l'expression B (ou inversement !).
- Passer par une étape intermédiaire, consistant à égaler A avec C et C avec B. On pourra alors conclure à A = B.

Exemple

Soit ABC un triangle tel que AB = 3 cm, BC = 4 cm, CA = 5 cm.

Quelle est la nature du triangle ABC ?

Réponse : Ayant l'ensemble des longueurs des 3 côtés, et après une rapide figure, il nous semble que le triangle est rectangle en B. Nous allons appliquer la réciproque du théorème de Pythagore pour le démontrer :

$AB^2 = 9$, $BC^2 = 16$,

$AB^2 + BC^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2 = AC^2$

Conclusion : ABC est rectangle en B.

A partir de l'expression $\mathcal{A} = AB^2 + BC^2$, on a abouti à l'expression $\mathcal{B} = AC^2$

II. Résoudre des équations, des inéquations

1. Mettre en équation

Il s'agit ici de compétences en « résolution de problèmes » pour lesquelles il n'existe donc pas de méthode unique ou qui convienne à tous, cependant nous pouvons vous proposer un certain nombre d'aides méthodologiques. Ce qui vous semble souvent le plus difficile, c'est d'effectuer le fameux « changement de registre », que vous connaissez bien, en tous les cas en français : traduire une phrase du langage familier en langage soutenu, par exemple.
« Chez nous », c'est un peu la même chose. Lorsque nous avons un texte, écrit en français, il va falloir, pour faciliter la résolution du problème, remplacer certaines phrases par des égalités mathématiques, après s'être donné une (ou des) inconnue(s).
Considérons l'énoncé ci-dessous, il n'y a rien de « mathématiques » dans sa forme. C'est ici donc que commence le travail de « mise en équations ».

Enoncé

Des amis font un repas en commun. En versant chacun 8 euros, il manque 5,25 euros pour payer la note. S'ils versent chacun 9 euros, ils ont 1,75 euros de trop. Quel est le nombre de personnes et le prix du repas ?

Proposons un guide de travail :

Etape 1 : Choix des inconnues

Comme son nom l'indique, l'inconnue est une valeur, présente dans le texte ou la question, mais dont on ne connaît pas la valeur. Ici, on nous pose deux questions en référence à l'énoncé. Nous allons donc choisir 2 inconnues.
Nous avons tendance à choisir des lettres « parlantes » pour les inconnues. Il nous semble plus naturel de nommer p un prix, plutôt que x. Lorsque les données sont nombreuses, ceci peut être une aide précieuse.

Soit N le nombre de convives et p le prix d'un repas

Etape 2 : Mathématisation du problème

Il s'agit de reprendre le texte et de chercher les relations mathématiques liant les données. Reprenons notre exemple et cherchons à voir d'où viennent les deux équations ci-dessous.
L'énoncé évoque la note : elle s'élève à $N \times p$.
En versant chacun 8 euros, (il y a alors $8N$ dans la soucoupe) il manque 5,25 euros pour payer la note (qui vaut $N \times p$). On obtient ainsi (1).
On reprend la seconde phrase et on obtient l'équation (2).

$$(1)\ 8N + 5{,}25 = N \times p$$

$$(2)\ 9N - 1{,}75 = N \times p$$

Etape 3 : Résolution du système

Il s'agit maintenant de résoudre ce système de deux équations à deux inconnues, et c'est l'objet du paragraphe suivant…

2. Résoudre une équation

Résoudre une équation, c'est trouver toutes les valeurs que peuvent prendre les inconnues pour rendre une égalité vraie.

Pour les équations à une inconnue

La technique consiste à isoler l'inconnue d'un côté de l'égalité.
Pour cela :

- On peut ajouter un même nombre de chaque côté de l'égalité, afin de rendre l'égalité plus agréable. Ici par exemple, on choisit d'annuler les expressions en x à droite du signe « = » ; ce que nos étudiants appellent couramment « passer de l'autre côté ».
- On peut multiplier de chaque côté par un même nombre non nul... ce que nos étudiants appellent aussi « passer de l'autre côté ». Attention aux confusions !
- Il faut ensuite conclure. Pour être sûr que les nombres trouvés sont bien solutions, il faut systématiquement faire une vérification et l'écrire sur la copie. (Pour ceux qui maîtrisent cette notion, il s'agit en fait de faire la réciproque. Vous pouvez bien entendu travailler directement par équivalences.)

Soit à résoudre l'équation suivante :

$$3x + 1 = \frac{5}{2}x - \frac{1}{3}$$

Appliquons l'ensemble des règles ci-dessus :

$$3x + 1 = \frac{5}{2}x - \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3x + 1 + \left(-\frac{5}{2}x - 1\right) = \frac{5}{2}x - \frac{1}{3} + \left(-\frac{5}{2}x - 1\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x = -\frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x \times \frac{2}{1} = -\frac{4}{3} \times \frac{2}{1}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{8}{3}$$

L'équation admet donc une solution unique égale à $-\frac{8}{3}$

Pour les systèmes de deux équations à deux inconnues

Il s'agit de trouver les valeurs possibles des différentes inconnues pour rendre vraies toutes les égalités à la fois. Le principe général est d'arriver à une équation à une inconnue, de la résoudre, puis de trouver toutes les solutions de proche en proche.
Il existe deux grandes méthodes :

- **Par substitution** : on choisit une des équations dans laquelle on exprime (avec les techniques ci-dessus) une inconnue en fonction des autres. On la remplace alors dans les autres équations. On recommence ce processus avec les autres équations (on ne touche plus à la première) jusqu'à avoir une équation à une inconnue, que l'on résout (on sait faire..). Enfin, en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées, on trouve les solutions possibles, puis on vérifie.
- **Par combinaison linéaire** : le principe est de remplacer une équation par une combinaison linéaire non nulle des deux équations pour aboutir à une équation à une inconnue, comme dans l'exemple ci-dessous. Puis on vérifie.

Exemple

Soit à résoudre le système : $\begin{cases} 3x + 9y = 12 \\ 5x + 2y = 7 \end{cases}$

Appliquons les deux méthodes vues plus haut :

Par substitution :	Par combinaison linéaire :
$\begin{cases} 3x + 9y = 12 \\ 5x + 2y = 7 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 4 - 3y \\ 5(4 - 3y) + 2y = 7 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 4 - 3y \\ 20 - 13y = 7 \end{cases}$ $\begin{cases} y = \dfrac{13}{13} = 1 \\ x = 4 - 3 = 1 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x + 9y = 12 & (L_1) \\ 5x + 2y = 7 & (L_2) \end{cases}$ $\begin{cases} 3x + 9y = 12 & (L_1) \\ 15x + 45y - (15x + 6y) = 60 - 21 & (5L_1 - 3L_2) \end{cases}$ $\begin{cases} 3x + 9y = 12 \\ 39y = 39 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 1 \\ x = \dfrac{12 - 9y}{3} = 1 \end{cases}$

III. Géométrie

1. Ecrire un programme de construction

On veut faire tracer un cercle.

On ne dit pas : *Mettre la pointe du compas en A et fais un cercle passant par B.*

Mais on dit : *Tracer le cercle de centre A passant par B.*

Puisqu'il s'agit d'une construction, il faut absolument utiliser des verbes d'actions : tracer le segment, nommer les points, etc.
Et puisque vous allez aussi enseigner le français, il faut être homogène dans votre programme : à l'infinitif, à l'impératif, au choix…
La principale difficulté est que le récepteur de votre message ne connaît pas la figure originale, donc rien dans votre programme ne doit prêter à confusion ou à

ambiguïté. Par exemple, lorsque vous tracez une médiatrice, vous ne représentez que des arcs de cercles, afin de ne pas surcharger la figure. Mais êtes-vous sûr que vos arcs se coupent toujours ? Et avez-vous besoin des 2 points d'intersection ? Faudra-t-il faire un choix entre ces deux points ? Il est souvent plus prudent d'indiquer dans le programme le tracé des cercles complets (on voit ainsi combien ils ont de points d'intersection) même si concrètement on ne trace que les parties de cercles (les arcs) nécessaires.

On ne dit pas :
« dessus, dessous, à droite, à gauche » (que se passe-t-il si nous tournons votre feuille ?).
Mais…
« situé dans le demi-plan délimité par la droite (AB) et contenant C »
ou « ABCD écrit dans le sens des aiguilles d'une montre ».

2. Bâtir une démonstration en géométrie

La démonstration est l'outil de preuve des mathématiciens. Elle répond à des exigences bien spécifiques. Nous allons nous attarder plus précisément au domaine de la géométrie, mais ce qui suit peut s'adapter à tout domaine mathématique.

Cet exercice repose sur quatre piliers :

- une connaissance approfondie des définitions et théorèmes du cours ;
- l'analyse des données ;
- l'analyse de la conclusion ;
- un va-et-vient entre les trois points précédents : une fois démontrée, la conclusion d'une question devient une donnée pour la suite.

Il comporte aussi plusieurs phases :

- l'analyse du sujet ;
- la conception de la démonstration ;
- la rédaction de la démonstration.

Des difficultés peuvent se présenter à chacun des stades.

Analyse du sujet

Il s'agit de bien comprendre quelles sont les données de l'énoncé. On les appelle aussi hypothèses. Mais contrairement au langage courant, où une hypothèse désigne un fait possible mais non certain, l'hypothèse mathématique est une donnée de départ, fournie par l'énoncé. Il faut donc faire la liste de ces données, et éventuellement les reformuler dans un langage plus « mathématique » (c'est le fameux « changement de registre » dont nous vous parlions plus haut).

Exemples

« *M appartient au cercle de centre O de rayon R* »

peut se traduire par « $OM = R$ »

« *A' est le symétrique de A par rapport à I* »

se traduit par « *I est milieu de [AA']* »

soit encore « $AI = IA$ *et* $I \in [AA']$ »

Il faut ensuite analyser la conclusion de la même manière et déterminer les différentes formulations possibles de ce que l'on demande de montrer.
L'analyse du sujet est donc, entre autres, un travail de traduction

Conception de la démonstration

Une fois les données de départ et le but poursuivi analysés, il faut construire un chemin de l'un à l'autre à l'aide des théorèmes du cours. Il faut rechercher parmi ceux que vous connaissez, ceux qui demandent des hypothèses dont vous disposez, et qui vous fourniront une conclusion proche de votre but. Avec parfois des étapes intermédiaires...
Le brouillon intervient ici pour noter les idées. La réalisation d'une figure (à main levée éventuellement), vous permettra de mieux cerner les données à votre disposition, et de synthétiser les informations. Une « figure fausse » est parfois très utile pour ne pas utiliser abusivement des informations qui ne figureraient pas dans l'énoncé.
La démonstration peut comporter plusieurs étapes, **chacune d'entre elles fournissant des conclusions, qui deviennent à leur tour des hypothèses pour la phase suivante**.
Deux grandes stratégies se dégagent : soit partir des données de l'énoncé et tenter d'aboutir à la conclusion demandée à l'aide des théorèmes et propriétés ; soit opérer par ce qu'on appelle « chaînage arrière » et partir de la conclusion. On cherche alors quelles sont les propriétés du cours qui peuvent mener à cette conclusion, et on examine pour chacune si on dispose des données (ou hypothèses) nécessaires à son application.

Rédaction

C'est la synthèse du travail précédent. Il s'agit de trouver les mots qui montreront au lecteur le cheminement de votre raisonnement.
Pour chaque théorème utilisé, il faudra faire la liste des données que vous utilisez, citer le nom du théorème s'il en possède, puis énoncer la conclusion.
Il existe deux grands types de formulation.

– La première est l'énonciation des hypothèses utiles,
– puis celle du théorème,
– puis celle de la conclusion.

Comme........... et .... d'après...................... on peut dire (ou « on a »)....

L'autre type de démonstration est celui « qui annonce la couleur ».

- On énonce le théorème,
- puis la conclusion
- et enfin les hypothèses.

Par le théorème ....   – on peut dire que ....   – car ....

Cette deuxième façon de faire est souvent plus difficile. Si vous n'êtes pas féru de géométrie, nous vous conseillons d'opter pour la première méthode.

Comment faire...

Dans un premier temps, il vous faut apprendre à rechercher les mots inducteurs ou les hypothèses. Si l'on reconnaît des configurations particulières, cela peut permettre de reconnaître le théorème à employer.
Le triangle est rectangle ? Le théorème de Pythagore nous permet de calculer des longueurs inconnues.
Les points sont sur un cercle ? Deux forment un diamètre ? Il y a sans doute de l'angle inscrit ou des triangles rectangles là-dessous !
Il y a des parallèles ? Pourquoi pas Thalès…

Nous allons passer en revue quelques types de questions très classiques en géométrie.

3. Montrer l'alignement de trois points

Problème : nous avons trois points distincts A, B et C du plan. On nous demande de démontrer que ces points sont alignés. Nous citons plusieurs méthodes, le choix de celle que vous utiliserez dépendra des hypothèses supplémentaires de votre énoncé.

- On peut démontrer que C est sur la droite (AB).
- On peut calculer l'angle $\widehat{ACB}$ et voir qu'il mesure 0° ou 180°.
- On peut, si l'on connaît les longueurs AB, BC, CA, constater que ces points vérifient le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire : si BC = BA + AC, alors A est sur le segment [BC].
- On peut utiliser les droites remarquables du triangle : peut-être que A est centre de gravité du triangle A'BC' et que C est le milieu de [A'C']. Ainsi, (BC) est une médiane du triangle et donc A, B et C sont alignés.
- On peut enfin montrer par diverses méthodes que les droites (AB) et (AC) sont parallèles. Deux parallèles ayant un point commun (ici A) sont confondues, donc A, B et C sont alignés.

4. Répondre à un « vrai ou faux »

Il vous sera presque systématiquement demandé de justifier vos réponses. Une règle fondamentale à retenir :

- Pour montrer qu'une affirmation est vraie mathématiquement, il faut montrer qu'elle est toujours vraie, et donc faire une démonstration (avec des variables exprimées avec des lettres, et non pas des exemples).