Chapitre 1
Espaces vectoriels

Hermann **Grassmann**, mathématicien allemand, publie en 1844 un ouvrage qui contient tous les germes de l'algèbre linéaire : combinaisons linéaires, indépendance linéaire, bases, ainsi que des notions plus complexes qui serviront soixante ans plus tard en géométrie différentielle. Très confus, son ouvrage ne sera pas compris de ses contemporains. Il faudra attendre 1888 pour que le mathématicien italien Giuseppe **Peano** en saisisse toute l'importance et introduise l'axiomatique des espaces vectoriels, proche de celle que nous utilisons de nos jours. Quant à Grassmann, il préféra se tourner vers la linguistique et mit son intelligence au service de la traduction en allemand des textes sacrés védiques.

Hermann Grassmann
1809-1877

Objectifs

Les incontournables

- ▷ Montrer qu'une famille est libre, génératrice dans un espace vectoriel de dimension quelconque.
- ▷ Justifier qu'une application est linéaire.
- ▷ Reconnaître une équation linéaire.
- ▷ Approfondir les notions de somme et de somme directe de sous-espaces vectoriels, ainsi que de sous-espaces vectoriels supplémentaires, et donc de projecteur.
- ▷ Déterminer le rang d'une famille de vecteurs ou d'une application linéaire.
- ▷ Utiliser le théorème du rang.

Et plus si affinités...

- ▷ Établir que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires dans un espace vectoriel de dimension finie ou non.
- ▷ Résoudre une équation linéaire.

Résumé de cours

On désigne par $\mathbf{K}$ le corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Dans tout le chapitre, E désigne un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.

Famille libre, génératrice

Famille libre

Définition : ▹ *$(x_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$, famille **finie** de vecteurs de E, est **libre** si et seulement si quelle que soit la famille $(\lambda_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in \mathbf{K}^n$,*

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0_E \Rightarrow \forall i \in [\![1,n]\!],\ \lambda_i = 0}$$

▹ *$(x_i)_{i\in I}$, famille de vecteurs de E de cardinal quelconque, est **libre** si et seulement si toutes ses sous-familles finies sont libres.*
▹ *Les x_i, $i \in I$, sont **linéairement indépendants** si, et seulement si, la famille $(x_i)_{i\in I}$ est libre.*
▹ *Si une famille n'est pas libre, on dit qu'elle est **liée**.*

Commentaires : ▹ Si une famille est libre, toute famille obtenue en permutant ses éléments est libre : le fait qu'une famille soit libre ne dépend pas de l'ordre de ses éléments.
▹ Toute famille contenue dans une famille libre est libre.
▹ Toute famille contenant une famille liée est liée. (C'est la contraposition de l'implication précédente.) En particulier, toute famille contenant le vecteur nul est liée.
▹ Une famille de deux vecteurs est liée si et seulement si ces deux vecteurs sont colinéaires.
▹ Une famille contenant plusieurs fois le même élément est liée.

Famille génératrice

Définition : *Une famille $(x_i)_{i\in I}$ est une **famille génératrice** de E si le sous-espace vectoriel qu'elle engendre est E. (Autrement dit, $\mathrm{Vect}\,(x_i)_{i\in I} = E$)*

Commentaire : La famille $(x_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice de E si et seulement si tout vecteur de E peut s'écrire comme une combinaison linéaire de la famille $(x_i)_{i\in I}$.

Base

Définition : *On appelle **base** de E toute famille de E libre et génératrice.*

Commentaire : La famille $(x_i)_{i\in I}$ est une base de E si et seulement si tout vecteur de E peut s'écrire de manière unique comme combinaison linéaire de la famille $(x_i)_{i\in I}$.

Exemples : ▹ $(X^i)_{i\in\mathbf{N}}$ est une base de $\mathbf{K}[X]$. $(X^i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ est une base de $\mathbf{K}_n[X]$.
▹ $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ est une base de $\mathbf{R}^3$.
Ce sont les bases les plus simples de chacun de ces espaces vectoriels : on dit que ce sont leurs **bases canoniques** respectives.

■ Dimension d'un espace vectoriel

Définition : *Un espace vectoriel est* ***de dimension finie*** *s'il admet une famille génératrice finie.*

Théorème 1.1 (de la base incomplète).— ▷ Tout K-espace vectoriel E de dimension finie admet une base finie.
▷ On peut extraire de toute famille génératrice finie de E une base de E.
▷ Toute famille libre de E peut être complétée en une base de E.

Commentaire : Dans un espace vectoriel de dimension finie, une famille libre ne peut avoir plus d'éléments qu'une famille génératrice.

Théorème-Définition 1.2.— Toutes les bases d'un espace vectoriel E de dimension finie ont le même nombre d'éléments, appelé ***dimension de*** E et noté $\mathsf{dim}\, E$.
Par convention, la dimension de $\{0_E\}$ est 0.

Caractérisation des bases

Proposition 1.3.— Si $\mathsf{dim}\, E = n$ et si $\mathcal{B}$ est une famille de n vecteurs de E, alors il y a équivalence entre :
▷ $\mathcal{B}$ est une base de E ;
▷ $\mathcal{B}$ est une famille libre de E ;
▷ $\mathcal{B}$ est une famille génératrice de E.

Commentaire : Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, pour tout vecteur x de E, il existe un unique n-uplet $(x_1, \ldots, x_n)$ de K^n tel que $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$.
$(x_1, \ldots, x_n)$ est le ***n-uplet des coordonnées du vecteur x dans la base $\mathcal{B}$.***

Dimension et inclusion

Proposition 1.4.— Tout sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel de dimension finie E est de dimension finie et $\mathsf{dim}\, F \leq \mathsf{dim}\, E$. De plus, si $\mathsf{dim}\, F = \mathsf{dim}\, E$, alors $F = E$.

■ Somme de deux sous-espaces

Conformément au programme de TSI, on suppose que E est un K-espace vectoriel de dimension finie. Les définitions suivantes restent valables dans un cadre plus général.

Théorème-Définition 1.5.— Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
L'ensemble $\{f + g,\ (f, g) \in F \times G\}$ est un sous-espace vectoriel de E, appelé ***somme de*** F ***et*** G.
Il est noté $F + G$. On a de plus :

$$\boxed{\mathsf{dim}\,(F + G) = \mathsf{dim}\, F + \mathsf{dim}\, G - \mathsf{dim}\,(F \cap G)}$$

Définition : *On dit que* ***deux*** *sous-espaces vectoriels F et G sont en* ***somme directe*** *si leur intersection est réduite au singleton $\{0_E\}$. On écrit alors $F + G = F \oplus G$.*

Commentaire : Si F et G sont en somme directe, la décomposition d'un vecteur de $F+G$ en somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G est unique. On a de plus $\dim(F+G) = \dim F + \dim G$.

Définition : *On dit que deux sous-espaces vectoriels F et G sont **supplémentaires** dans E si tout vecteur x de E s'écrit de manière unique sous la forme : $x = f + g$ avec $(f,g) \in F \times G$. On dit alors que E est **somme directe** de F et G, que l'on note $E = F \oplus G$.*

Proposition 1.6.— Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Les propositions suivantes sont équivalentes :
▷ F et G sont supplémentaires dans E ;
▷ $F \cap G = \{0_E\}$ et $E = F + G$;
▷ $F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim E = \dim F + \dim G$;
▷ $E = F + G$ et $\dim E = \dim F + \dim G$.

■ Application linéaire, matrice (rappel de 1-TSI)

On désigne par E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels.

Définition : *Une application $u : E \to F$ est dite **linéaire** si elle vérifie :*

$$\boxed{\forall (x,y) \in E^2,\ \forall \lambda \in \mathbf{K}, \quad u(x+\lambda y) = u(x) + \lambda u(y)}$$

Notation : *On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E vers F.*

Commentaires : ▷ $\mathcal{L}(E,F)$ est $\mathbf{K}$-espace vectoriel. Lorsque E et F sont de dimensions finies, on a : $\dim \mathcal{L}(E,F) = \dim E \times \dim F$.
▷ Une application linéaire de E dans E est appelée ***endomorphisme*** de E.
▷ Une application linéaire de E dans $\mathbf{K}$ est appelée ***forme linéaire*** de E.
▷ Une application linéaire de E dans F bijective est appelée ***isomorphisme***.
▷ On dit que deux espaces vectoriels E et F sont ***isomorphes*** s'il existe un isomorphisme de E vers F.
▷ Deux espaces vectoriels de dimension finie sont isomorphes si et seulement si ils ont la même dimension. En particulier tout espace vectoriel de dimension n est isomorphe à $\mathbf{K}^n$.
▷ Si $u \in \mathcal{L}(E,F)$, la linéarité de u entraîne que pour connaître u (respectivement définir u), il suffit de connaître u (respectivement définir u) sur une base de E.

Noyau, image d'une application linéaire

Définition : *Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. On appelle **noyau** de u l'ensemble noté $\operatorname{Ker} u$, défini par*

$$\boxed{\operatorname{Ker} u = u^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E, \quad u(x) = 0\}}$$

Proposition 1.7.— Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$.
▷ Le noyau de u est un sous-espace vectoriel de E.
▷ u est injective si et seulement si $\operatorname{Ker} u = \{0_E\}$.

Définition : *Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. On appelle **image** de u l'ensemble noté $\operatorname{Im} u$ défini par :*

$$\boxed{\operatorname{Im} u = u(E) = \big\{u(x),\ x \in E\big\} = \big\{y \in F,\ \exists x \in E,\ y = u(x)\big\}}$$

Proposition 1.8.— Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. L'image de u est sous-espace vectoriel de F.

Projecteur et symétrie

Définition : *Un endomorphisme p de E est un **projecteur** s'il vérifie $p^2 = p$.*

Proposition 1.9.— Le noyau et l'image d'un projecteur p de E sont supplémentaires :
$$E = \mathsf{Ker}\, p \oplus \mathsf{Im}\, p.$$

Remarque : Lorsque $E = E_1 \oplus E_2$, tout vecteur x de E s'écrit de manière unique : $x = x_1 + x_2$ où $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$. Notons p_1 (respectivement p_2) l'application de E dans E définie par : $p_1(x) = x_1$ (respectivement $p_2(x) = x_2$). Alors p_1 est un projecteur de E, d'image E_1 et de noyau E_2 : on dit que p_1 est le ***projecteur sur** E_1 **parallèlement à** E_2*. De même p_2 est le projecteur sur E_2 parallèlement à E_1.

Définition : *Un endomorphisme s de E est une **symétrie** s'il vérifie $s^2 = \mathrm{id}_E$.*

Commentaires : ▷ Une symétrie de E est un isomorphisme de E, égal à son inverse.
▷ Lorsque $E = E_1 \oplus E_2$, tout vecteur x de E s'écrit de manière unique : $x = x_1 + x_2$ où $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$. Notons s_1 l'application de E dans E définie par : $s_1(x) = x_1 - x_2$. Alors s_1 est une symétrie de E, appelée ***symétrie par rapport à** E_1 **parallèlement à** E_2*. On définit de manière analogue la symétrie par rapport à E_2 parallèlement à E_1 en posant $s_2(x) = -x_1 + x_2$.

Matrice et application linéaire

On suppose que E et F sont de dimensions respectives n et p, soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_p)$ une base de F.
Une application linéaire de u de E dans F est entièrement déterminée par la donnée des vecteurs $u(e_j)$, $j \in [\![1,n]\!]$, qui, eux-mêmes, sont déterminés par leurs coordonnées dans la base $\mathcal{C}$.

Définition : *On appelle **matrice de** u **par rapport aux bases** $\mathcal{B}$ **et** $\mathcal{C}$, et on note $M_{\mathcal{BC}}(u)$, la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$ dont la j-ième colonne, pour $j \in [\![1,n]\!]$, est formée des composantes de $u(e_j)$ dans la base $\mathcal{C}$.*

Commentaire : Si on note $M_{\mathcal{BC}}(u) = (a_{ij})$, on a : $\forall j \in [\![1,n]\!], \qquad u(e_j) = \sum\limits_{i=1}^{p} a_{ij} f_i.$

Remarque : Lorsque $E = F$ et $\mathcal{B} = \mathcal{C}$, on note $M_{\mathcal{B}}(u)$ cette même matrice.

Matrice de passage

On suppose que E est de dimension n, soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$ deux bases de E.

Définition : *On appelle **matrice de passage entre les bases** $\mathcal{B}$ **et** $\mathcal{C}$ la matrice de id_E par rapport aux bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{B}$.*

Commentaire : Si $P = (p_{ij})$ désigne la matrice de passage entre les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, on a :
$$\forall j \in [\![1,n]\!], \qquad f_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i.$$

■ Notion de rang

Rang d'une famille

Définition : *Le* ***rang d'une famille finie de vecteurs*** *est la dimension du sous-espace vectoriel qu'elle engendre.*

Rang d'une application linéaire

Définition : *Le* ***rang d'une application linéaire*** u *est la dimension de son image. On le note* $\mathsf{Rg}\, u$.

Commentaire : Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, et u une application de E vers un $\mathbf{K}$-espace vectoriel F, le rang de u est le rang de la famille de vecteurs $\big(u(e_1), \ldots, u(e_n)\big)$.

Théorème 1.10 (du rang).— Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension **finie**, F un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension quelconque et u une application linéaire de E dans F. Alors $\mathsf{Im}\, u$ est de dimension finie et

$$\boxed{\mathsf{Rg}\, u + \dim \mathsf{Ker}\; u = \dim E}$$

Corollaire 1.11.— Soient E et F deux espaces vectoriels de **même** dimension **finie** et u une application linéaire de E vers F, les propositions suivantes sont équivalentes :

▷ u est bijective ;
▷ u est injective ;
▷ u est surjective.

Rang d'une matrice

Définition : *Le* ***rang d'une matrice*** $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ *est le rang de la famille de ses p vecteurs colonnes dans* $\mathbf{K}^n$. *On le note* $\mathsf{Rg}\,(A)$.

Commentaires : ▷ Le rang de la matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ est également le rang de ses n vecteurs lignes dans $\mathbf{K}^p$. Autrement dit, une matrice et sa transposée ont même rang.
▷ Le rang d'une matrice est le rang de toute application linéaire qu'elle représente.

■ Matrices carrées

Multiplication

Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Le produit de la matrice A par la matrice B est la matrice $AB = (c_{ij})$ avec

$$\boxed{\forall i, j \in [\![1, n]\!] \qquad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}}$$

Définition : *Une matrice A est* ***inversible*** *s'il existe une matrice B telle que :* $AB = BA = I_n$.

Commentaires : ▷ Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est inversible si et seulement si son rang est n.
▷ Une matrice est inversible si et seulement si tout endomorphisme qu'elle représente l'est.

Exemple : Toute matrice de passage entre deux bases d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie est inversible.

Notation : *L'ensemble des matrices inversibles est noté $GL_n(\mathbf{K})$, il est appelé **groupe linéaire** sur le corps $\mathbf{K}$.*

Matrices semblables

Définition : *Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ sont **semblables** s'il existe une matrice P inversible telle que $B = P^{-1}AP$.*

Commentaire : Deux matrices sont semblables si et seulement si elles représentent le même endomorphisme dans deux bases d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie. La matrice P s'interprète alors comme la matrice de passage entre ces deux bases.

Transposition

Définition : *Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On appelle **transposée** de A, la matrice notée ${}^tA$, définie par ${}^tA = (b_{ij})$ où pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $b_{ij} = a_{ji}$.*

Commentaire : L'application $A \mapsto {}^tA$ est une symétrie de $M_n(\mathbf{K})$.

Définition : *Une matrice A est dite **symétrique** lorsque ${}^tA = A$.*
*Une matrice A est dite **antisymétrique** lorsque ${}^tA = -A$.*

Proposition 1.12.— ▷ L'ensemble $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ des matrices symétriques est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$.
▷ L'ensemble $\mathcal{A}_n(\mathbf{R})$ des matrices antisymétriques est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$.
▷ Les sous-espaces vectoriels $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbf{R})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

Trace d'une matrice

Définition : *On appelle **trace** de la matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ la somme de ses éléments diagonaux. On la note $\mathrm{Tr}A$.*

Remarque : Si $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, on a alors $\mathrm{Tr}A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Proposition 1.13.— L'application $\begin{array}{rccc} \mathrm{Tr} : & \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ & A & \longmapsto & \mathrm{Tr}A \end{array}$ est linéaire.

Commentaire : Cela signifie que : $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^2,\ \forall \lambda \in \mathbf{R},\quad \mathrm{Tr}(A + \lambda B) = \mathrm{Tr}A + \lambda \mathrm{Tr}B$.

Proposition 1.14.— Pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on a

$$\boxed{\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)}$$

Corollaire 1.15.— Deux matrices semblables ont même trace.