Chapitre 1

Équations différentielles ordinaires

1.1 Généralités

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et

$$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad (t, y) \longmapsto f(t, y),$$

une application. Une équation différentielle (vectorielle) du premier ordre, est une équation de la forme

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y).$$

On utilsera souvent la notation : $y' = f(t, y)$ ou encore $\dot{y} = f(t, y)$. Le lecteur peut s'il le désire utiliser d'autres notations ainsi que d'autres variables comme par exemple : $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ ou $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$, etc, nous les utiliserons en cas de besoin dans d'autres chapitres.

Définition 1.1.1 *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide. Une solution de l'équation ci-dessus est une fonction dérivable*

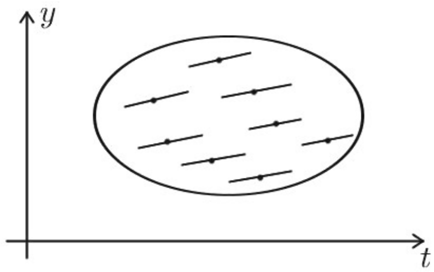
$$y : I \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad t \longmapsto y(t),$$

telle que : $\forall t \in I$, $(t, y(t)) \in \Omega$ et

$$\forall t \in I, \quad y'(t) = f(t, y(t)).$$

Si $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ désigne une solution de l'équation différentielle ci-dessus, alors la trajectoire de φ est définie par l'ensemble $\{(t, \varphi(t)) : t \in I\} \subseteq \Omega$. L'ensemble $\{\varphi(t) : t \in I\}$ s'appelle l'orbite de la solution. Géométriquement, l'équation différentielle ci-dessus peut s'interpréter comme un champ de vecteurs sur Ω.

Comme $\varphi'(t) = f(t, y)$, alors en chaque point de Ω, la courbe d'équation $y = \varphi(t)$ (une telle courbe est dite courbe intégrale) possède une tangente de pente $f(t, y)$. La fonction f définit un champ de vecteurs sur Ω : à chaque point (t, y) de la courbe, on associe le vecteur de coordonnées $(1, f(t, y))$. Ce vecteur est tangent à la courbe. La trajectoire d'une solution φ est donc une courbe attirée par ce champ de vecteurs. Autrement dit, en chacun de ses points cette courbe est tangente au vecteur correspondant du champ.



Posons $y = (y_1, ..., y_n)$ et $f = (f_1, ..., f_n)$. Avec un abus d'écriture, l'équation différentielle $y' = f(t, y)$ s'écrit

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(t, y_1, ..., y_n), \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(t, y_1, ..., y_n), \end{aligned}$$

Une solution de ce système est un système de n fonctions $y_1, ..., y_n$. L'équation différentielle ci-dessus est dite sous forme normale (ou résolu en y').

Définition 1.1.2 *Étant donné un point $(t_0, y_0) \in \Omega$, le problème de Cauchy (relatif aux conditions initiales (t_0, y_0)) pour l'équation*

$$y'(t) = f(t, y),$$

consiste à chercher une solution $y(t)$ sur un intervalle I contenant t_0 telle que : $y(t_0) = y_0$

Définition 1.1.3 *On dit que la fonction $y : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une solution de l'équation différentielle d'ordre n :*

$$y^{(n)} = f(t, y, y', ..., y^{(n-1)}),$$

si elle est dérivable n fois et si $\forall t \in I$, $(t, y(t), y'(t), ..., y^{(n-1)}(t)) \in \Omega$ et

$$y^{(n)}(t) = f(t, y(t), y'(t), ..., y^{(n-1)}(t)).$$

Étant donné $(t_0, y_0, y'_0, ..., y_0^{(n-1)}) \in \Omega$, le problème de Cauchy concernant cette équation consiste à trouver une solution telle que :

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y'_0, \quad ..., \quad y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)}.$$

L'équation ci-dessus est dite sous forme normale (ou résolu en $y^{(n)}$).

Proposition 1.1.4 *Toute équation différentielle d'ordre n sous forme normale peut être ramenée à un système de n équations du premier ordre sous forme normale.*

Démonstration. En effet, soit l'équation

$$y^{(n)} = f(t, y, y', ..., y^{(n-1)}).$$

En posant $x_1 = y$, $x_2 = y'$,...,$x_n = y^{(n-1)}$, cette équation se ramène à un système du premier ordre

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_2, \\ x'_2 &= x_3, \\ &\vdots \\ x'_{n-1} &= x_n, \\ x'_n &= f(t, x_1, ..., x_n), \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Proposition 1.1.5 *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $y : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, une fonction dont le graphe est inclus dans Ω. Alors la fonction y est solution du problème de Cauchy*

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0$$

si et seulement si elle est continue et vérifie l'équation intégrale

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau)) d\tau, \quad \forall t \in I.$$

Démonstration. La solution y de l'équation différentielle ci-dessus étant continue, on en déduit que $f(\tau, y(\tau))$ est aussi continue. En intégrant les deux membres de l'équation différentielle de t_0 à t, on obtient

$$y(t) - y(t_0) = \int_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau)) d\tau.$$

Réciproquement, soit y une solution continue de l'équation intégrale. La fonction $y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau)) d\tau$, est dérivable (en fait elle est de classe $\mathcal{C}^1$) car sa dérivée vaut $f(t, y(t))$ qui est continue. On peut alors dériver l'équation intégrale et on obtient $y'(t) = f(t, y(t))$. □

Définition 1.1.6 *Soit (E,d) un espace métrique. L'application* $T : E \longrightarrow E$ *est dite contractante (ou contraction) s'il existe un nombre réel* k*,* $0 < k < 1$ *tel que :*

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y), \quad \forall x, y \in E.$$

Remarque 1.1.7 *Une application contractante est évidemment continue mais la réciproque est fausse en général. Par exemple l'identité sur l'espace* E *n'est pas contractante. Notons aussi que le nombre réel* k *doit être strictement inférieur à* 1*.*

Théorème 1.1.8 *(du point fixe de Banach). Soit (E,d) un espace métrique complet et soit* $T : E \longrightarrow E$ *une application contractante. Alors* T *possède un et un seul point fixe (c-à-d. un unique point* x *tel que :* $Tx = x$*).*

Démonstration. Soit $x_0 \in E$. Considérons la suite des points :

$$x_1 = Tx_0, \quad x_2 = Tx_1, \quad ..., \quad x_{n+1} = Tx_n.$$

(i) Cette suite est de Cauchy. En effet, on a pour $m > n \geq 1$,

$$\begin{array}{rcl} d(x_n, x_m) & = & d(Tx_{n-1}, Tx_{m-1}), \\ & \leq & kd(Tx_{n-1}, Tx_{m-1}), \text{ car } T \text{ est contractante} \\ & = & kd(Tx_{n-2}, Tx_{m-2}), \\ & \leq & k^2 d(Tx_{n-2}, Tx_{m-2}), \\ & \vdots & \\ & \leq & k^n d(Tx_0, Tx_{m-n}). \end{array}$$

D'après l'inégalité triangulaire, on a

$$\begin{array}{rcl} d(Tx_0, Tx_{m-n}) & \leq & d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2) + \cdots + d(x_{m-n-1}, x_{m-n}), \\ & \leq & (1 + k + k^2 + \cdots + k^{m-n-1}) d(x_0, x_1), \end{array}$$

car T est contractante. Dès lors,

$$d(Tx_0, Tx_{m-n}) \leq \frac{1 - k^{m-n}}{1 - k} d(x_0, x_1) \leq \frac{1}{1 - k} d(x_0, x_1) \text{ car } 0 < k < 1,$$

et par conséquent

$$d(x_n, x_m) \leq \frac{k^n}{1 - k} d(x_0, x_1) \longrightarrow 0 \text{ quand } n \longrightarrow \infty \text{ car } k < 1$$

Donc la suite en question est une suite de Cauchy.

(ii) Comme E est complet, il existe $x = \lim_{n\to\infty} x_n \in E$.

(iii) Montrons que x est un point fixe. En effet, on a $Tx = T\lim_{n\to\infty} x_n$. Comme T est contractante, alors elle est continue (car si $x_n \longrightarrow x$, alors d'après l'inégalité $d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$, on a également $Tx_n \longrightarrow Tx$). Dès lors,

$$Tx = \lim_{n\to\infty} Tx_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x.$$

(iv) Montrons que x est unique. En effet, si $Tx = x$ et $Ty = y$, alors l'inégalité $d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$, s'écrit $d(x, y) \leq kd(x, y)$. Or $k < 1$, donc $d(x, y) = 0$, d'où $x = y$. □

Le théorème ci-dessus (appelé aussi théorème du point fixe de Picard) montre l'existence et l'unicité de la solution de l'équation : $Tx = x$. En outre, il fournit une méthode effective de calcul approché de cette solution (méthode dite des approximations successives) ; pour déterminer cette solution, il suffit de partir d'un point quelconque $x_0 \in E$ et de calculer la limite de la suite $x_{n+1} = Tx_n$, $0 \leq n < \infty$.

Corollaire 1.1.9 *S'il existe p tel que $T^p = ToTo...oT$ est contractante, alors T admet un point fixe unique dans E.*

Démonstration. D'après le théorème précédent, il existe un point fixe unique x avec $T^p x = x$. On a

$$Tx = TT^p x = T^p Tx,$$

donc Tx est aussi un point fixe de T^p. Or x est un point fixe unique de T^p, d'où $Tx = x$ et par conséquent x est un point fixe de T. Montrons que x est unique. Si y est un autre point fixe de T, alors,

$$T^2 y = TTy = Ty = y.$$

En raisonnant par récurrence, on obtient

$$T^p y = T\left(T^{p-1} y\right) = Ty = y,$$

et comme x est un point fixe unique de T^p, alors $y = x$, d'où le résultat. □

Remarques 1.1.10 *a) Notons que si T^p est une application contractante, il n'est pas vrai en général que T soit aussi une application contractante. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer la transformation*

$$T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \longmapsto (2y, 0).$$

Celle-ci n'est pas une application contractante mais T^2 en est une. Pour cet exemple, on vérifie que l'unique point fixe de T est bien celui de T^2.

b) Fréquement, on rencontre en pratique des applications contractantes définies sur un boule d'un espace métrique complet et non sur l'espace tout entier. Le théorème précédent peut encore être appliqué à cette situation moyannant quelques rectifications comme le montre l'exercice ci-dessous.

Exercice 1.1.1 *Soient (E,d) un espace métrique complet, $B = B(x_0, r)$ une boule ouverte dans E et $T : B \longrightarrow E$ une application contractante. Supposons que :*

$$d(x_0, Tx_0) < r(1-k), \quad k < 1$$

Montrer que T possède un et un seul point fixe dans B.

<u>Solution</u> : On va utiliser un raisonnement similaire à celui fait dans la preuve du théorème 1.1.8. Posons $x_1 = Tx_0$ et comme

$$d(x_0, x_1) = d(x_0, Tx_0) < r(1-k) < r,$$

alors $x_1 \in B$. Posons $Tx_1 = x_2$ et supposons que $x_0, x_1, ..., x_n$ soient ainsi construits dans B. Soit $x_{n+1} = Tx_n$ et montrons par récurrence que $x_{n+1} \in B$. En effet, d'après l'inégalité triangulaire, on a

$$\begin{array}{rcl} d(x_0, x_{n+1}) & \leq & d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2) + \cdots + d(x_n, x_{n+1}), \\ & \leq & (1 + k + \cdots + k^n) d(x_0, x_1), \\ & < & (1 + k + \cdots + k^n) r(1-k), \\ & = & r(1 - k^{n+1}), \\ & < & r, \end{array}$$

d'où, $x_{n+1} \in B$. Montrons que (x_n) est une suite de Cauchy. Par hypothèse, l'espace E est complet, il admet donc une limite $x = \lim_{n\to\infty} x_n \in E$. Vérifions que $x \in B$. On a

$$\begin{array}{rcl} d(x_0, x) & = & d(x_0, \lim\limits_{n\to\infty} x_n), \\ & = & \lim\limits_{n\to\infty} d(x_0, x_n), \\ & \leq & \lim\limits_{n\to\infty} (1 + k + \cdots + k^{n-1}) d(x_0, x_1), \\ & = & \dfrac{1}{1-k} d(x_0, x_1), \\ & < & \dfrac{1}{1-k} r(1-k), \\ & = & r, \end{array}$$

d'où, $x \in B$. Enfin, pour montrer que x est un point fixe unique de T, il suffit de raisonner comme dans le théorème 1.1.8.

1.2 Existence et unicité des solutions

Définition 1.2.1 *a) Soit* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $(t, y) \longmapsto f(t, y)$ *une fonction où* Ω *est un ouvert de* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. *On dit que* f *est lipschitzienne par rapport à* y *s'il existe un réel positif* k *tel que :*

$$\forall (t, y_1) \in \Omega, \quad \forall (t, y_2) \in \Omega, \quad \|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq k\|y_1 - y_2\|.$$

Lorsque $k < 1$, *la fonction* f *est contractante.*

b) On dit que f *est localement lipschitzienne par rapport à* y *si tout point* $(t, y) \in \Omega$, *possède un voisinage appartenant à* Ω *et dans lequel* f *est lipschitzienne par rapport à* y.

Propriété 1.2.2 *Soit* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $(t, y) \longmapsto f(t, y)$ *où* Ω *est un ouvert de* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

a) Si $f(t, y)$ *est lipschitzienne par rapport à* y, *alors elle est uniformément continue par rapport à* y.

b) Si $f(t, y)$ *est localement lipschitzienne par rapport à* y, *alors elle est continue par rapport à* y.

c) Si $f(t, y)$ *possède des dérivées partielles premières continues par rapport à* y, *alors elle est localement lipschitzienne dans* Ω.

d) Si Ω *est connexe et si* $f(t, y)$ *possède des dérivées partielles en* y *continues, alors elle est lipschitzienne si et seulement si ses dérivées sont bornées.*

e) Si $f(t, y)$ *est continue et localement lipschitzienne sur un compact, alors elle est lipschitzienne sur ce compact.*

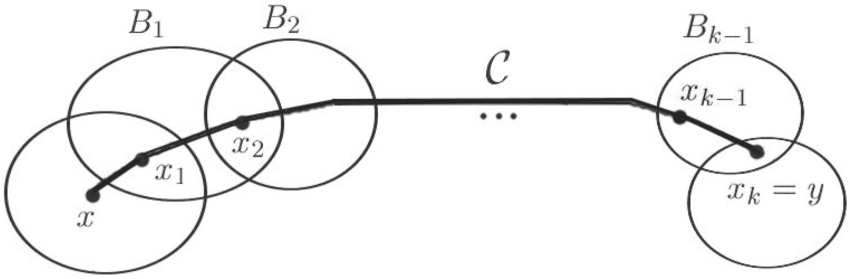
Soit

$$S = \{(t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |t - t_0| \leq l, \|y - y_0\| \leq r\} \subset \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n,$$

un cylindre (de sécurité), de centre (t_0, y_0), de demi-axe l et de rayon r, $r > 0$ et $l > 0$ étant finis. Notons que S peut être vu comme étant le produit cartésien d'un intervalle fermé $[t_0 - l, t_0 + l]$ et d'une boule fermée $\{y \in \mathbb{R}^n : \|y - y_0\| \leq r\}$.

Proposition 1.2.3 *Soit* $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $(t, y) \longmapsto f(t, y)$ *une fonction localement lipschitzienne par rapport à* y. *Alors que pour tout cylindre fermé* $S \subset \Omega$, f *est lipschitzienne par rapport à* y *sur* S.

Démonstration. Soient (t, x) et (t, y) deux points dans le cylindre S. Comme celui-ci est connexe, on peut relier ces points par une courbe $\mathcal{C}$. Soit B_1 une boule ouverte dans S contenant le point (t, x_1). Cette boule existe puisque S est compacte (en fait, de tout recouvrement par des ouverts, on peut en extraire un recouvrement fini). Soit $x_2 \in \mathcal{C}$ tel que x_2 soit contenu dans la boule B_1. De même, soit B_2 une boule ouverte dans S contenant le point x_2 et soit $x_3 \in \mathcal{C}$ tel que x_3 soit contenu dans la boule B_2. On continue ainsi, en considérant $x_k \in \mathcal{C}$, x_k contenu dans une boule ouverte B_{k-1} de S, avec $B_{k-1} \ni x_{k-1}$. Cette construction montre qu'on peut, en un nombre k fini d'étapes, recouvrir la courbe $\mathcal{C}$ reliant le point x au point y par des voisinages de x ; le point y jouant le rôle de x_k.



On a

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq \|f(t,x) - f(t,x_1)\| + \|f(t,x_1) - f(t,x_2)\| + \cdots + \|f(t,x_k) - f(t,y)\|.$$

Or par hypothèse f est localement lipschitzienne, donc f est lipschitzienne dans chaque boule ouverte B_k (avec chacune une constante de Lipschitz). Soit K le maximum de ces constantes de Lipschitz. Donc

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq K(\|x - x_1\| + \|x_1 - x_2\| + \cdots + \|x_k - y\|),$$

et le résultat en découle. □

Le théorème de Cauchy (ou théorème de Cauchy-Lipschitz, ou encore théorème de Picard-Lindelöf chez les anglophones) affirme sous certaines conditions à préciser, que le problème de Cauchy (relatif à l'équation différentielle $y' = f(t,y)$) avec donnée initiale (t_0, y_0) admet une unique solution. Plus précisément, on a

Théorème 1.2.4 *(Existence et unicité locale). Soit*

$$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad (t,y) \longmapsto f(t,y),$$

où Ω est un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. On suppose que f est continue en (t,y) et localement lipschitzienne par rapport à y. Alors, pour tout point $(t_0,y_0) \in \Omega$, il existe un intervalle fermé I centré en t_0 et une solution locale $y : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de l'équation différentielle $y' = f(t,y)$ avec condition initiale $y(t_0) = y_0$. En outre $y \in \mathcal{C}^1$ et cette solution est unique.