

# Chapitre 1

## Définitions et exemples

### Introduction

Dans ce chapitre on introduit tout d'abord un espace de base, noté  $\mathcal{D}$ , constitué de fonctions indéfiniment dérivables à support borné. Ensuite on donne les exemples 1.1.3 et 1.1.4 de fonctions appartenant à l'espace  $\mathcal{D}$ . Ces fonctions sont souvent utilisées aussi bien dans les démonstrations de quelques théorèmes que dans la résolution de nombreux exercices. Une distribution  $T$  est une fonctionnelle linéaire

$$T : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}(\text{ou } \mathbb{C}), \quad \varphi \longmapsto \langle T, \varphi \rangle,$$

et continue (en un sens qui sera précisé) sur l'espace  $\mathcal{D}$ . On donne d'autres définitions équivalentes, utiles en pratique. Les distributions forment un espace vectoriel, noté  $\mathcal{D}'$ , dual de  $\mathcal{D}$ . On montre que les fonctions localement sommables déterminent des distributions :

$$\mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}(\text{ou } \mathbb{C}), \quad \varphi \longmapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx.$$

Ce résultat nous sera d'un grand recours pour la suite car pour définir les opérations sur les distributions on commence tout d'abord par les définir sur les fonctions localement sommables et ensuite on généralise les définitions obtenues à l'ensemble des distributions. Un autre exemple important est la distribution  $\delta$  de Dirac (elle représente une masse ou une charge  $+1$  placée à l'origine). On la définit d'une manière rigoureuse et on explique pourquoi elle ne peut pas être une fonction. Ensuite on définit une mesure comme étant une fonctionnelle linéaire continue (dans un sens qui sera précisé) sur l'espace  $\mathcal{C}$  des fonctions continues à support borné. On montre que toute mesure est une distribution et que la réciproque n'est pas nécessairement vraie. La distribution  $\delta$  de Dirac

est une mesure. A partir de quelques définitions locales sur des ouverts recouvrant  $\mathbb{R}^n$ , on reconstitue la définition globale d'une distribution sur  $\mathbb{R}^n$ . C'est l'objet du théorème du recollement par morceaux, que nous démontrons. Ceci nous permet d'introduire la notion de support d'une distribution. Nous verrons qu'une distribution particulière peut admettre une extension à un espace plus large que  $\mathcal{D}$ . Enfin plusieurs exercices concernant la valeur principale de Cauchy, les supports des fonctions et des distributions, la parité des distributions, les parties finies de Hadamard, etc., sont traités en détail. Les exercices 1.6.1 et 1.6.3 sont très importants et seront souvent utilisés par la suite.

## 1.1 Espace des fonctions test $\mathcal{D}$

**Définition 1.1.1** On définit le support d'une fonction  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ ) par

$$\text{supp } f = \text{adh } \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\},$$

*c'est-à-dire l'adhérence de l'ensemble des  $x$  tels que  $f(x)$  est non identiquement nulle. Autrement dit, c'est le plus petit ensemble fermé en dehors duquel  $f$  est identiquement nulle.*

**Exemple 1.1.1** Soit  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $r = \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ . On pose

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-r^2}} & \text{si } r < 1 \\ 0 & \text{si } r \geq 1 \end{cases}$$

On a  $\text{supp } f = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ ; la boule de centre 0 et de rayon 1.

**Définition 1.1.2** On désigne par  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , ou tout simplement,  $\mathcal{D}$  l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables à support borné

$$\mathcal{D} = \{\varphi \in \mathcal{C}^\infty : \text{supp } \varphi \text{ borné}\}.$$

*Cet ensemble s'appelle espace de base et ses éléments fonctions de base (ou fonctions tests).*

Notons que  $\mathcal{D}$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$  (si  $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}$  et  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ , alors  $\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 \in \mathcal{D}$ ) de dimension infinie. Il n'est pas évident que l'espace  $\mathcal{D}$  contient d'autres fonctions que les fonctions nulles. Nous donnerons ci-après (voir exemples 1.1.3 et 1.1.4 ainsi que l'exercice 1.7.1) quelques exemples de telles fonctions et qui seront utiles par la suite.

**Exemple 1.1.2** La fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . Si  $x < 0$ , toutes les dérivées de  $f$  sont nulles. Si  $x = 0$ , les dérivées à gauche de  $f$  sont nulles. Si  $x > 0$ , on a

$$f'(x) = \frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}, \quad f''(x) = \frac{4-6x^2}{x^6}e^{-\frac{1}{x^2}}, \dots, f^{(k)}(x) = \frac{P(x)}{x^{3k}}e^{-\frac{1}{x^2}},$$

où  $P(x)$  est un polynôme. Dès lors,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f^{(k)}(x) = P(0) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{3k}} = P(0) \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{u^{\frac{3k}{2}}}{e^u} = 0,$$

il suffit d'appliquer plusieurs fois la règle de l'Hospital. Enfin, si  $x = 0$ , les dérivées à droite de  $f$  sont nulles :  $f^{(k)}(0) = 0, \forall k \in \mathbb{N}$ . En effet, procédons par récurrence sur  $k$ . Pour  $k = 0$ , c'est évident. Supposons que  $f^{(k)}(0) = 0$  et montrons que :  $f^{(k+1)}(0) = 0$ . On a

$$f^{(k+1)}(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(k)}(x) - f^{(k)}(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} P(x) \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{3k+1}} = P(0) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{3k+1}} = 0.$$

Ainsi  $f(x)$  est indéfiniment dérivable.

**Exemple 1.1.3** La fonction  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$$

appartient à  $\mathcal{D}$ . En effet, si  $|x| > 1$ , alors  $\varphi(x) = 0$  et  $\varphi \in \mathcal{C}^\infty$ . De même, si  $|x| < 1$ ,  $\frac{1}{1-x^2} \in \mathcal{C}^\infty$  et  $\varphi(x) = e^{-\frac{1}{1-x^2}} \in \mathcal{C}^\infty$ . Si  $|x| = 1$ , on utilise le même raisonnement que dans l'exemple précédent. On montre dans ce cas que l'on a  $\varphi^{(k)}(x) = 0$ , donc  $\varphi \in \mathcal{C}^\infty$ . En outre,  $\text{supp } \varphi = [-1, 1]$  et par conséquent  $\varphi \in \mathcal{D}$ .

**Exemple 1.1.4** (Lemme d'Urysohn) : Soit  $K$  un compact de  $\mathbb{R}^n$ . Alors il existe une fonction  $\varphi \in \mathcal{D}$  telle que :

- (i)  $0 \leq \varphi(x) \leq 1$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ .
- (ii)  $\varphi(x) = 1$  sur  $K$ .
- (iii)  $\varphi(x) = 0$  en dehors d'un ouvert contenant  $K$ .

**Notation** : Si  $\varphi$  est une fonction de  $\mathcal{D}$  et si  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$  est un multi-indice, on pose

$$D^\alpha \varphi = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \cdots \left( \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\alpha_n} = \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

avec  $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ .

**Remarque 1.1.1** On peut munir l'espace  $\mathcal{D}$  de la topologie limite inductive, en introduisant une famille de semi-normes mais dans tout ce qui va suivre, la connaissance de cette topologie n'est pas nécessaire ; il suffit de connaître la notion de convergence des suites dans  $\mathcal{D}$ .

**Définition 1.1.3** On dit qu'une suite de fonctions  $(\varphi_k) \in \mathcal{D}$  converge dans  $\mathcal{D}$  vers une fonction  $\varphi \in \mathcal{D}$  si :

- (i) tous les supports des  $\varphi_k$  sont contenus dans un même compact  $K$ .
- (ii) pour tout  $j \in \mathbb{N}$ , la suite des dérivées  $(\varphi_k^{(j)})$  converge uniformément<sup>1</sup> vers  $\varphi^{(j)}$  sur  $K$ .

**Remarque 1.1.2** Dans le cas de plusieurs variables, la condition (ii) est remplacée par celle-ci : (ii)' Pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ , la suite  $(D^\alpha \varphi_k)$  converge uniformément vers  $D^\alpha \varphi$  sur  $K$ .

**Notation** : On écrit  $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$  pour dire que  $(\varphi_k)$  converge dans  $\mathcal{D}$  vers  $\varphi$ .

## 1.2 Définition d'une distribution

**Définition 1.2.1** On appelle distribution  $T$  une fonctionnelle linéaire continue sur  $\mathcal{D}$ .

(i) fonctionnelle linéaire signifie : une application  $T$  de  $\mathcal{D}$  dans  $\mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ ) faisant correspondre à une fonction  $\varphi \in \mathcal{D}$ , un nombre noté  $\langle T, \varphi \rangle$  tel que : pour tous  $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}$  et  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ , on a

$$\langle T, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 \rangle = \alpha\langle T, \varphi_1 \rangle + \beta\langle T, \varphi_2 \rangle.$$

Au lieu de fonctionnelle linéaire, on dit aussi forme linéaire.

(ii) continue signifie : si la suite  $(\varphi_k)$  converge dans  $\mathcal{D}$  vers  $\varphi$ , alors  $\langle T, \varphi_k \rangle$  converge au sens usuel vers  $\langle T, \varphi \rangle$ .

Autrement dit, une fonctionnelle linéaire sur  $\mathcal{D}$  définit une distribution si pour toute suite  $(\varphi_k) \in \mathcal{D}$  qui converge dans  $\mathcal{D}$  vers zéro, la suite  $\langle T, \varphi_k \rangle$  converge au sens usuel vers zéro.

<sup>1</sup>La suite  $(\varphi_k^{(j)})$  converge uniformément vers  $\varphi^{(j)}$  dans  $K$  si, quel que soit  $\varepsilon > 0$ , il existe un entier  $N(\varepsilon)$  tel que, pour tout  $k \geq N(\varepsilon)$  et tout  $x \in K$ , on ait  $|\varphi_k^{(j)}(x) - \varphi^{(j)}(x)| \leq \varepsilon$  c'est-à-dire si  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{x \in K} |\varphi_k^{(j)}(x) - \varphi^{(j)}(x)| = 0$ .

**Proposition 1.2.2** *Une fonctionnelle linéaire sur  $\mathcal{D}$  est une distribution si et seulement si, pour tout compact  $K$  et pour toute fonction  $\varphi \in \mathcal{D}$  avec  $\text{supp } \varphi \subset K$ , il existe une constante  $C > 0$  et un entier  $m$  tels que :*

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \sum_{j=0}^m \sup_{x \in K} |\varphi_k^{(j)}(x)|. \quad (1.2.1)$$

*Démonstration* : Soit  $T$  une distribution sur  $\mathcal{D}$  et supposons que pour toute constante  $C > 0$  et tout entier  $m$ , il existe un compact  $K$  et une fonction  $\varphi_k \in \mathcal{D}$ ,  $\text{supp } \varphi_k \subset K$  tels que :

$$|\langle T, \varphi_k \rangle| \leq C \sum_{j=0}^m \sup_{x \in K} |\varphi_k^{(j)}(x)|.$$

Choisissons  $C = m = k$  et posons  $\psi_k = \frac{\varphi_k}{\langle T, \varphi_k \rangle}$ . La fonction  $\psi_k$  appartient à  $\mathcal{D}$  car  $\psi_k \in \mathcal{C}^\infty$  et  $\text{supp } \psi_k \subset \text{supp } \varphi_k \subset K$ . Dès lors,

$$1 = \langle T, \psi_k \rangle \geq k \sum_{j=0}^k \sup_{x \in K} |\psi_k^{(j)}(x)|,$$

et

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left( \sup_{x \in K} |\psi_k^{(j)}(x)| \right) = 0, \quad k \geq j$$

c'est-à-dire  $\psi_k^{(j)}$  converge uniformément vers 0 ce qui est absurde puisque  $\langle T, \psi_k \rangle$  ne converge pas (au sens usuel) vers 0. Réciproquement, supposons que la suite  $(\varphi_k)$  converge dans  $\mathcal{D}$  vers 0 c'est-à-dire  $\text{supp } \varphi_k \subset K$  et  $\varphi_k^{(j)}(x)$  converge uniformément vers 0. Donc

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left( \sup_{x \in K} |\varphi_k^{(j)}(x)| \right) = 0,$$

et d'après (1.2.1),  $\langle T, \varphi_k \rangle$  converge (au sens usuel) vers 0. Donc la définition précédente et la proposition 1.2.2 sont équivalentes.  $\square$

**Remarques 1.2.1** a) *Dans le cas de plusieurs variables, l'expression (1.2.1) est évidemment remplacée par celle-ci*

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in K} |D^\alpha \varphi(x)|.$$

b) *Une distribution n'a pas de valeur en un point, mais on peut parler de la valeur d'une distribution dans un ouvert quelconque.*

c) On dira qu'une distribution  $T$  est réelle si  $\langle T, \varphi \rangle$  est réel où  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ . Toute distribution arbitraire  $T$  peut s'écrire sous la forme  $T = R + iS$  où  $R$  et  $S$  sont des distributions réelles, autrement dit,

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle R, \varphi \rangle + i\langle S, \varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

De même, on définit la distribution complexe conjuguée (notée  $\bar{T}$ ) d'une distribution  $T$  en posant

$$\langle \bar{T}, \varphi \rangle = \overline{\langle T, \bar{\varphi} \rangle}, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

Soient  $T_1, T_2, T$  des distributions et  $\lambda$  un scalaire. On définit la somme  $T_1 + T_2$  et le produit  $\lambda T$ , par les relations :

$$\begin{aligned} \langle T_1 + T_2, \varphi \rangle &= \langle T_1, \varphi \rangle + \langle T_2, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D} \\ \langle \lambda T, \varphi \rangle &= \lambda \langle T, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D} \end{aligned}$$

Les applications  $T_1 + T_2$  et  $\lambda T$  de  $\mathcal{D}$  dans  $\mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ ), sont des distributions. Donc

**Proposition 1.2.3** *Les distributions forment un espace vectoriel que l'on note  $\mathcal{D}'$  (espace dual de  $\mathcal{D}$ ).*

Soit  $\mathcal{D}^m$  l'espace vectoriel des fonctions ayant des dérivées d'ordre  $j$  continues pour  $0 \leq j \leq m$  et à support borné.

**Définition 1.2.4** *On dit qu'une suite de fonctions  $(\varphi_k) \in \mathcal{D}^m$  converge dans  $\mathcal{D}^m$  vers une fonction  $\varphi \in \mathcal{D}^m$  si :*

(i) tous les supports des  $\varphi_k$  sont contenus dans un même compact  $K$ .

(ii) pour tout  $j \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq j \leq m$ , la suite des dérivées  $(\varphi_k^{(j)})$  converge uniformément vers  $\varphi^{(j)}$  sur  $K$ .

Toute fonctionnelle linéaire continue sur  $\mathcal{D}^m$  est dite distribution d'ordre  $m$ . Autrement dit, d'après la proposition 1.2.2, la distribution  $T$  est dite d'ordre  $m$  lorsque l'inégalité (1.2.1) est satisfaite pour  $0 \leq j \leq m$ . De telles distributions constituent un espace vectoriel noté  $\mathcal{D}'^m$ .

## 1.3 Exemples de distributions

### 1.3.1 Fonctions localement sommables

**Définition 1.3.1** *Une fonction  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ ) est dite localement sommable si elle est sommable sur tout ensemble borné  $K$  de  $\mathbb{R}^n$ , c'est-à-dire, si*

$$\int_K |f(x)| dx < +\infty.$$

*On dit aussi qu'elle est localement intégrable.*

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ ) une fonction localement sommable. Nous allons montrer que  $f(x)$  engendre une distribution  $T_f$  par

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}.$$

L'intégrale ci-dessus existe car on intègre en fait, non sur  $\mathbb{R}$ , mais sur le support borné de  $\varphi$ .

(i)  $T_f$  est linéaire en effet, soient  $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}$  et  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ,

$$\begin{aligned} \langle T_f, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(\alpha\varphi_1(x) + \beta\varphi_2(x))dx, \\ &= \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi_1(x)dx + \beta \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi_2(x)dx, \\ &= \alpha \langle T_f, \varphi_1 \rangle + \langle T_f, \varphi_2 \rangle. \end{aligned}$$

(ii)  $T_f$  est continue : en effet, par hypothèse la suite  $(\varphi_k)$  converge vers  $\varphi$  dans  $\mathcal{D}$ , c'est-à-dire tous les supports des  $\varphi_k$  sont contenus dans un même compact  $[a, b]$  et pour tout  $j \in \mathbb{N}$ , la suite des dérivées  $(\varphi_k^{(j)})$  converge uniformément vers  $\varphi^{(j)}$ ,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left( \sup_{x \in [a, b]} |\varphi_k^{(j)}(x) - \varphi^{(j)}(x)| \right) = 0.$$

Montrons que  $\langle T_f, \varphi_k \rangle$  converge vers  $\langle T_f, \varphi \rangle$ . On a

$$\begin{aligned} |\langle T_f, \varphi_k \rangle - \langle T_f, \varphi \rangle| &= |\langle T_f, \varphi_k - \varphi \rangle|, \\ &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(\varphi_k(x) - \varphi(x))dx \right|, \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)||\varphi_k(x) - \varphi(x)|dx, \\ &\leq \left( \int_a^b |f(x)|dx \right) \cdot \sup_{x \in [a, b]} |\varphi_k(x) - \varphi(x)|. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a

**Proposition 1.3.2** *Toute fonction  $f(x)$  localement sommable définit une distribution  $T_f$  par*

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}.$$

Dans  $\mathbb{R}^n$ , toute fonction  $f(x_1, \dots, x_n)$  localement sommable définit une distribution  $T_f$  par la relation

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, \dots, x_n) \varphi(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n, \quad \varphi \in \mathcal{D}.$$

**Proposition 1.3.3** *Deux fonctions  $f$  et  $g$  localement sommables définissent la même distribution si et seulement si elles sont égales presque partout.*

*Démonstration* : Si  $f(x) = g(x)$  presque partout, alors  $\langle T_f, \varphi \rangle = \langle T_g, \varphi \rangle$ , quel que soit  $\varphi \in \mathcal{D}$ . Montrons que la réciproque est vraie. Par hypothèse, on a  $\langle T_f, \varphi \rangle = \langle T_g, \varphi \rangle$ , c'est-à-dire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \varphi(x) dx,$$

qui peut encore s'écrire  $\int_{-\infty}^{+\infty} h(x) \varphi(x) dx = 0$ , où  $h(x) = f(x) - g(x)$ . Il s'agit de montrer que  $h(x) = 0$  presque partout. Pour cela, posons  $\psi_k = (\varphi_\alpha(x))^{1/k}$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$  où  $\varphi_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction définie par

$$\varphi_\alpha(x) = \begin{cases} e^{-\frac{\alpha}{\alpha^2 - x^2}} & \text{si } |x| < \alpha \\ 0 & \text{si } |x| \geq \alpha \end{cases}$$

avec  $\alpha > 0$ , une constante. Comme dans l'exemple 1.1.3, on a  $\psi_k \in \mathcal{D}$  avec  $\text{supp } \psi_k = [-\alpha, \alpha]$ . Posons  $g_k(x) = h(x) \psi_k(x)$ . Pour tout  $x \in ]-\alpha, \alpha[$ , on a  $\lim_{k \rightarrow \infty} g_k(x) = h(x)$ . En outre, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  et tout  $x \in \mathbb{R}$ , il existe une fonction sommable qui majore  $|g_k(x)|$  :

$$|g_k(x)| = |h(x) \psi_k(x)| \leq |h(x)| \cdot \sup_{\mathbb{R}} \psi_k(x).$$

Ainsi, les hypothèses du théorème de convergence dominée de Lebesgue sont satisfaites et on peut donc permuter limite et intégrale :

$$0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) \psi_k(x) dx = \int_{-\alpha}^{\alpha} h(x) dx,$$

car  $\text{supp } \psi_k = [-\alpha, \alpha]$  et  $\lim_{k \rightarrow \infty} \psi_k(x) = 1$ . D'où,  $h(x) = 0$  sur  $[-\alpha, \alpha]$  et puisque  $\alpha$  est arbitraire,  $h(x) = 0$  presque partout sur  $\mathbb{R}$ .  $\square$

**Remarque 1.3.1** *D'après les deux propositions précédentes, on convient dans la suite d'identifier le symbole  $f$  qui représente la fonction localement sommable définie presque partout, à celui qui représente la distribution  $T_f$  qui lui est associée :  $T_f = f$ .*