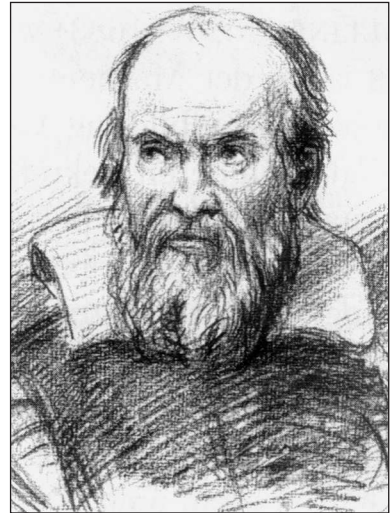


Chapitre 1

Mécanique classique

Convaincu par le modèle héliocentrique postulé par **Copernic** en 1530, **Galilée** se penche sur la notion de mouvement. Il rompt totalement avec la conception de l'époque et comprend que celui-ci est relatif et n'existe que par rapport à autre chose. Il énonce en 1604 le principe d'inertie selon lequel un mobile conserve sa vitesse acquise quand on supprime l'action de la force extérieure. Ses positions sont désapprouvées par l'Église ce qui l'amène à renier certaines de ses convictions pour avoir la vie sauve.

Environ cinquante ans plus tard, Isaac **Newton** (1643-1727) s'intéresse aux variations infinitésimales et s'approche de la notion actuelle de dérivée pour énoncer la fameuse loi éponyme qui corrèle le mouvement d'un corps aux forces appliquées à travers l'accélération, la dérivée première de la vitesse par rapport au temps. Dorénavant, on peut grâce à ces calculs, prévoir la position d'un mobile à tout instant en fonction des conditions initiales. En moins d'un siècle on est passé du monde des croyances à celui d'une science rigoureuse et prédictive.



Galilée
1564-1642

■ ■ Objectifs

■ Les notions que je dois maîtriser

- ▷ Savoir faire le lien entre vecteur position, vecteur vitesse et vecteur accélération pour la description d'un mouvement, dans un sens grâce à une dérivation par rapport au temps, et dans l'autre grâce à une intégration par rapport au temps
- ▷ Connaître les expressions et les caractéristiques de certaines forces particulières, telles que le poids d'un corps, la force gravitationnelle, la force électrique, la force de contact
- ▷ Connaître les lois de Newton qui permettent de déduire le mouvement d'un système connaissant les forces appliquées sur celui-ci
- ▷ Savoir définir une énergie potentielle en vue de traduire la conservation ou la non-conservation de l'énergie mécanique du système

■ Les compétences que je dois acquérir

- ▷ Être capable de projeter la deuxième loi de Newton sur des axes de projection intéressants puis, à partir de la connaissance du vecteur accélération, être capable de déterminer les équations horaires du mouvement
- ▷ Savoir exprimer l'énergie potentielle associée à une force conservative, même lorsque celle-ci n'est pas constante, afin de traduire la conservation ou la non-conservation de l'énergie mécanique du système
- ▷ Être capable de traiter le régime transitoire et le régime forcé en mécanique, savoir que ces régimes sont pilotés par une équation différentielle du premier ou du deuxième ordre et que la résolution de cette équation différentielle grâce à la connaissance d'une ou de plusieurs conditions initiales permet de prévoir l'évolution temporelle ultérieure du système
- ▷ Comprendre la notion de résonance en amplitude pour les systèmes mécaniques

■ ■ Résumé de cours

■ Description du mouvement

□ Notion de référentiel et de repères

Un référentiel est un solide de référence par rapport auquel on étudie le mouvement. On lui associe un repère spatial (origine et système d'axes orthogonaux) et un repère temporel (choix d'une origine des temps).

□ Vecteurs position, vitesse et accélération

Ces vecteurs sont définis par : \overrightarrow{OM} , $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$ et $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$.

□ Coordonnées cartésiennes, coordonnées dans la base de Frenet

Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, un mobile ponctuel M est repéré par ses coordonnées cartésiennes

(x, y, z) : $\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$; $\vec{v} = \frac{dx}{dt} \cdot \vec{i} + \frac{dy}{dt} \cdot \vec{j} + \frac{dz}{dt} \cdot \vec{k}$ et $\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \cdot \vec{k}$.

Les équations $x(t), y(t), z(t)$ constituent les équations horaires du mouvement.

La base de Frenet est la base mobile (\vec{u}_t, \vec{u}_n) telle que : $\vec{v} = v \cdot \vec{u}_t$ et $\vec{a} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{u}_t + \frac{v^2}{\rho} \cdot \vec{u}_n$ où ρ

désigne le rayon de courbure de la trajectoire.

⇒ **Méthode 1.1. Comment décrire le mouvement à partir des équations horaires ?**

■ Forces et mouvements

□ Forces

L'interaction gravitationnelle entre deux masses m_A et m_B distantes de r est telle que :

$\vec{F}_{A \rightarrow B} = -\vec{F}_{B \rightarrow A} = -G \cdot \frac{m_A \cdot m_B}{r^2} \cdot \vec{u}_{A \rightarrow B}$. La force s'exprime en newton N, les masses en kg et la

distance en m. Un astre de masse M crée à sa surface un champ de pesanteur \vec{g} tel que toute masse m placée dans ce champ subit une force résultant essentiellement de l'interaction gravitationnelle appelée poids du corps : $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$.

De façon analogue, une charge électrique q placée dans le champ électrique \vec{E} créé par d'autres charges subit une force électrique : $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$; q s'exprime en coulomb C et E en $V \cdot m^{-1}$.

Un corps placé sur un support subit une action de la part de celui-ci qui peut se décomposer en une action normale au support \vec{R}_n et une action tangente au support \vec{R}_t qui est la force de frottement. En l'absence de frottement, l'action du support est donc normale à celui-ci.

□ Lois de Newton

Les lois de Newton permettent de faire le lien entre les causes du mouvement et leurs effets. Elles s'appliquent dans un référentiel galiléen, c'est-à-dire dans un référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen de référence.

Pour la durée relativement courte d'une expérience, le référentiel terrestre ou référentiel du laboratoire peut être considéré comme galiléen. On utilise le référentiel géocentrique (centré sur la Terre et dont les axes pointent vers trois étoiles lointaines) supposé galiléen pour étudier le mouvement d'un corps tel qu'un satellite autour de la Terre et le référentiel héliocentrique (centré sur le Soleil et dont les axes pointent vers trois étoiles lointaines) supposé galiléen pour étudier le mouvement des astres du système solaire.

- Première loi de Newton ou principe de l'inertie : $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{v} = \text{constante}$: un système isolé ou pseudo-isolé est soit au repos, soit animé d'un mouvement rectiligne uniforme.

- Deuxième loi de Newton : $\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext}$ où \vec{p} désigne le vecteur quantité de mouvement :

$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$. Si le système est isolé ou pseudo-isolé, $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$ et $\vec{p} = \text{constante}$; on a ainsi conservation de la quantité de mouvement du système, ce qui permet d'expliquer la propulsion pour un système isolé ou pseudo-isolé constitué de deux corps.

Si la masse du système est constante, on écrit plus simplement : $m \cdot \vec{a} = \sum \vec{F}_{ext}$.

- Troisième loi de Newton ou principe des actions réciproques : $\vec{F}_{A \rightarrow B} = -\vec{F}_{B \rightarrow A}$.

□ Mouvements

Un mouvement uniformément accéléré est tel que $\vec{a} = \text{constante}$. C'est le cas du mouvement d'un projectile dans le champ de pesanteur \vec{g} supposé uniforme dans une région limitée de l'espace ou c'est le cas du mouvement d'une particule chargée dans le champ électrostatique \vec{E} supposé uniforme à l'intérieur d'un dispositif constitué de deux plaques chargées.

Mouvement circulaire uniforme : $v = \text{constante}$ mais $\vec{a} \neq \text{constante}$ car \vec{v} change en direction.

Mouvement elliptique des planètes du système solaire qui obéit aux lois de Kepler : les planètes décrivent des ellipses dont le Soleil est l'un des deux foyers, le rayon vecteur qui relie le Soleil à la planète balaye des aires égales pendant des durées égales (ce qui implique que la vitesse de la

planète est maximale au périhélie et minimale à l'aphélie) et le rapport $\frac{T^2}{a^3}$ du carré de la période de révolution sur le cube du demi-grand axe de l'ellipse est une constante indépendante de la planète du système solaire.

⇒ **Méthode 1.2. Comment déterminer la nature du mouvement connaissant les forces appliquées ?**

■ Travail, puissance et énergies

□ Travail et puissance d'une force

Pour une force constante au cours du déplacement de A vers B de son point d'application :

$$\boxed{W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \overline{AB}} \text{ et } \boxed{P = \frac{W}{\Delta t}}$$
 avec P la puissance en watt W , W le travail en joule J et Δt en s.

□ Énergie potentielle, énergie cinétique et énergie mécanique

À toute force conservative, c'est-à-dire à toute force dont le travail ne dépend pas du chemin suivi, on peut associer une énergie potentielle telle que $\boxed{\Delta E_p = -W(\vec{F})}$. Cette énergie est définie à une constante près dont la valeur dépend du choix conventionnel d'une référence.

– Énergie potentielle de pesanteur : $E_p = m \cdot g \cdot z + C$ où $(z'z)$ est un axe des altitudes orienté vers le haut ; on choisit généralement $E_p = 0 \text{ J}$ en $z = 0$ ainsi $C = 0$ et $E_p = m \cdot g \cdot z$.

– Énergie potentielle électrostatique : $E_p = q \cdot V + C$. En prenant $E_p = 0 \text{ J}$ loin de toute charge où $V = 0 \text{ V}$, $C = 0$ et $E_p = q \cdot V$.

Énergie cinétique : $E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$ et énergie mécanique : $E_m = E_p + E_c$.

⇒ **Méthode 1.3.** Comment déterminer l'expression de l'énergie potentielle ?

□ Variation de l'énergie mécanique

La variation de l'énergie mécanique est égale au travail des forces non conservatives :

$$\boxed{\Delta E_m = W(\vec{F}_{n.c.})}$$
 En l'absence de forces non conservatives telles que les frottements :

$\Delta E_m = 0 \text{ J}$, on a alors conservation de l'énergie mécanique du système.

⇒ **Méthode 1.4.** Comment écrire la variation de l'énergie mécanique ?

■ La réponse temporelle des systèmes mécaniques

□ Deux nouvelles forces : force de frottement fluide et force de rappel

force de frottement fluide

$$\vec{f} = -h \cdot \vec{v}$$

force de rappel exercée par un ressort

À l'équilibre :

En mouvement :
$$\vec{T} = -k \cdot \overline{OM}$$

□ Le régime transitoire et le régime sinusoïdal forcé

Le régime transitoire est le régime libre qui précède le régime permanent : par exemple chute d'une bille dans un fluide qui atteint une vitesse limite. Le régime sinusoïdal forcé est le régime commandé par un exciteur qui impose à l'oscillateur d'osciller à une fréquence donnée.

⇒ **Méthode 1.5.** Comment aborder le régime transitoire ?

⇒ **Méthode 1.6.** Comment aborder le régime sinusoïdal forcé ?

■ ■ Méthodes

□ Méthode 1.1. Comment décrire le mouvement à partir des équations horaires ?

- Choisir le système de coordonnées adapté pour décrire le mouvement puis, à partir des équations horaires du mouvement dans ce système de coordonnées, déterminer les coordonnées du vecteur vitesse et du vecteur accélération.
- Inversement, connaissant le vecteur accélération, déterminer le vecteur vitesse puis le vecteur position grâce à des intégrations successives par rapport au temps.

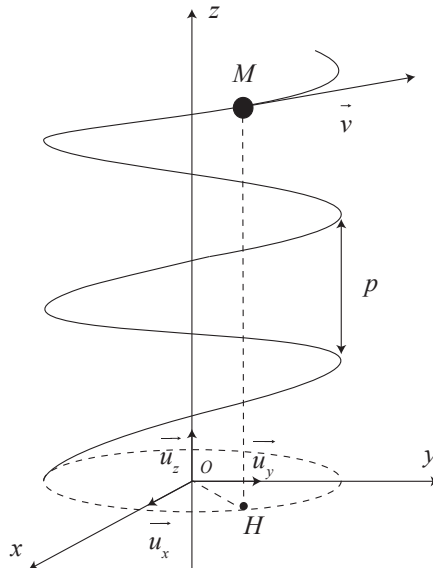
⇒ Exercices 1.1, 1.2, 1.3

Un mobile M est animé dans l'espace d'un mouvement hélicoïdal qui est caractérisé par les équations horaires : $x(t) = R \cdot \cos(\omega \cdot t)$; $y(t) = R \cdot \sin(\omega \cdot t)$; $z(t) = h \cdot \omega \cdot t$ écrites dans le repère cartésien (Ox, Oy, Oz) muni de la base orthonormée $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.

Le point H , projeté orthogonal du point M sur le plan (Ox, Oy) , décrit un mouvement circulaire car ses coordonnées (x, y) vérifient l'équation d'un cercle :

$x^2 + y^2 = R^2 \Leftrightarrow OH^2 = R^2$. Par ailleurs, le mouvement circulaire du point H est périodique de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ car les fonction sinus et cosinus sont périodiques de période 2π et

$\vec{OH}(t+T) = \vec{OH}(t)$. Le pas de l'hélice s'en déduit : $p = z(t+T) - z(t) = h \cdot \omega \cdot \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \cdot h$.



On se propose de déterminer le rayon de courbure noté ρ de cette trajectoire ainsi que l'inclinaison du vecteur vitesse par rapport au plan horizontal (Ox, Oy) .

On commence par déterminer les coordonnées du vecteur vitesse : $\vec{v} = \frac{d\overline{OM}}{dt}$.

$$\vec{v} \left(v_x = -R \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t) ; v_y = R \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t) ; v_z = h \cdot \omega \right).$$

La norme de la vitesse est constante et vaut : $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{R^2 + h^2} \cdot \omega$ car $\cos^2(\omega \cdot t) + \sin^2(\omega \cdot t) = 1$.

On sait que $\vec{a} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{u}_r + \frac{v^2}{\rho} \cdot \vec{u}_n$ donc $\vec{a} = \frac{v^2}{\rho} \cdot \vec{u}_n$ puisqu'ici $\frac{dv}{dt} = 0$.

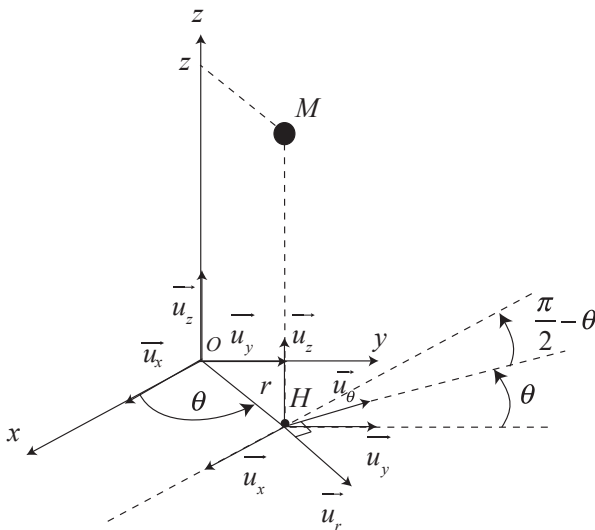
On détermine les coordonnées du vecteur accélération : $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$.

$\vec{a} \left(a_x = -R \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t) ; a_y = -R \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t) ; a_z = 0 \right)$; on observe que la norme de l'accélération est également constante et vaut : $a = R \cdot \omega^2$.

Le rayon de courbure de la trajectoire, qui représente le rayon du cercle tangent à la trajectoire au point considéré, s'en déduit : $\rho = \frac{v^2}{a} = \frac{(R^2 + h^2) \cdot \omega^2}{R \cdot \omega^2} = R + \frac{h^2}{R}$.

Par ailleurs $\vec{v} \cdot \vec{u}_z = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{u}_z\| \cdot \cos(\widehat{v, u_z}) = v \cdot \cos(\widehat{v, u_z}) = v_z = h \cdot \omega$ donc l'angle $(\widehat{v, u_z})$ est constant et tel que $\cos(\widehat{v, u_z}) = \frac{h \cdot \omega}{v} = \frac{h \cdot \omega}{\sqrt{R^2 + h^2} \cdot \omega} = \frac{h}{\sqrt{R^2 + h^2}}$; il vaut donc $\arccos\left(\frac{h}{\sqrt{R^2 + h^2}}\right)$.

On se propose maintenant de retrouver ce résultat en travaillant dans un nouveau système de coordonnées plus adapté pour décrire le mouvement hélicoïdal du mobile M ; il s'agit des coordonnées cylindriques (r, θ, z) exprimées dans la base orthonormée $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$.



$$\overline{OH} = r \cdot \vec{u}_r \text{ et } \vec{u}_\theta \perp \vec{u}_r$$

$$(\widehat{u_x, u_r}) = (\widehat{u_y, u_\theta}) = \theta$$

car $\vec{u}_r \perp \vec{u}_\theta$ et $\vec{u}_x \perp \vec{u}_y$

et deux angles à côtés respectivement perpendiculaires sont égaux.

$$\vec{u}_r = \cos \theta \cdot \vec{u}_x + \sin \theta \cdot \vec{u}_y$$

$$\vec{u}_\theta = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \cdot \vec{u}_x + \cos \theta \cdot \vec{u}_y$$

$$\vec{u}_\theta = -\sin \theta \cdot \vec{u}_x + \cos \theta \cdot \vec{u}_y$$

Dans cette base orthonormée : $\overrightarrow{OM} = r \cdot \overrightarrow{u}_r + z \cdot \overrightarrow{u}_z$. On se propose d'établir les expressions générales du vecteur vitesse et du vecteur accélération dans ce système de coordonnées. On observe pour cela que le vecteur unitaire radial \overrightarrow{u}_r s'écrit : $\overrightarrow{u}_r = \cos\theta \cdot \overrightarrow{u}_x + \sin\theta \cdot \overrightarrow{u}_y$ et que le vecteur unitaire orthoradial $\overrightarrow{u}_\theta$ s'écrit : $\overrightarrow{u}_\theta = -\sin\theta \cdot \overrightarrow{u}_x + \cos\theta \cdot \overrightarrow{u}_y$. Les dérivées par rapport au temps de ces vecteurs unitaires mobiles s'expriment simplement en utilisant le théorème de la dérivation des fonctions composées à savoir $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$. Par ailleurs, $\frac{d\overrightarrow{u}_z}{dt} = \vec{0}$ car \overrightarrow{u}_z est fixe.

$$\text{Ainsi : } \frac{d\overrightarrow{u}_r}{dt} = \frac{d\overrightarrow{u}_r}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \cdot (-\sin\theta \cdot \overrightarrow{u}_x + \cos\theta \cdot \overrightarrow{u}_y) = \frac{d\theta}{dt} \cdot \overrightarrow{u}_\theta$$

$$\text{et } \frac{d\overrightarrow{u}_\theta}{dt} = \frac{d\overrightarrow{u}_\theta}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \cdot (-\cos\theta \cdot \overrightarrow{u}_x - \sin\theta \cdot \overrightarrow{u}_y) = -\frac{d\theta}{dt} \cdot \overrightarrow{u}_r.$$

$$\text{Ainsi, partant de } \overrightarrow{OM} = r \cdot \overrightarrow{u}_r + z \cdot \overrightarrow{u}_z, \quad \vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d(r \cdot \overrightarrow{u}_r)}{dt} + \frac{dz}{dt} \cdot \overrightarrow{u}_z = \frac{dr}{dt} \cdot \overrightarrow{u}_r + r \cdot \frac{d\theta}{dt} \cdot \overrightarrow{u}_\theta + \frac{dz}{dt} \cdot \overrightarrow{u}_z \text{ et}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\frac{d^2r}{dt^2} \cdot \overrightarrow{u}_r + \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\theta}{dt} \cdot \overrightarrow{u}_\theta \right) + \left(\frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\theta}{dt} \cdot \overrightarrow{u}_\theta + r \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} \cdot \overrightarrow{u}_\theta - r \cdot \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \cdot \overrightarrow{u}_r \right) + \frac{d^2z}{dt^2} \cdot \overrightarrow{u}_z \text{ soit :}$$

$$\vec{a} = \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r \cdot \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) \cdot \overrightarrow{u}_r + \left(2 \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\theta}{dt} + r \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} \right) \cdot \overrightarrow{u}_\theta + \frac{d^2z}{dt^2} \cdot \overrightarrow{u}_z.$$

Dans le cas du mouvement hélicoïdal étudié : $\overrightarrow{OM} = R \cdot \overrightarrow{u}_r + h \cdot w \cdot t \cdot \overrightarrow{u}_z$ car $r = R$ et $z = h \cdot w \cdot t$.

On a donc : $\theta = w \cdot t$ car $x = r \cdot \cos\theta = R \cdot \cos(w \cdot t)$ et $y = r \cdot \sin\theta = R \cdot \sin(w \cdot t)$.

En utilisant les expressions générales établies précédemment, on obtient, puisque $\frac{dr}{dt} = 0$,

$$\frac{d^2r}{dt^2} = 0, \quad \frac{d\theta}{dt} = w, \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = 0, \quad \frac{dz}{dt} = h \cdot w \text{ et } \frac{d^2z}{dt^2} = 0 : \vec{v} = R \cdot w \cdot \overrightarrow{u}_\theta + h \cdot w \cdot \overrightarrow{u}_z \text{ et } \vec{a} = (-R \cdot w^2) \cdot \overrightarrow{u}_r.$$

$$\text{On retrouve ainsi : } v = \sqrt{R^2 + h^2} \cdot w ; \quad a = R \cdot w^2 \text{ et } (\widehat{v, u_z}) = \arccos\left(\frac{h}{\sqrt{R^2 + h^2}}\right).$$

□ Méthode 1.2. Comment déterminer la nature du mouvement connaissant les forces appliquées ?

- Définir le système et faire le bilan des forces extérieures appliquées sur celui-ci.
- Appliquer la deuxième loi de Newton dans un référentiel supposé galiléen afin d'obtenir une équation vectorielle reliant le vecteur accélération et les différents vecteurs forces.
- Utiliser le système de coordonnées adapté à la situation ; si on travaille dans un repère cartésien, on choisit un système d'axes dont l'un est parallèle à la trajectoire lorsque le mouvement est rectiligne ; si la trajectoire est circulaire, on travaille dans la base mobile de Frenet où l'on connaît l'expression du vecteur accélération.