

Table des matières

1 Espace probabilisé	1
1.1. Définitions.....	1
1.2. Schéma de Bernoulli	2
1.3. Mesure de Lebesgue sur $(0, 1]$	4
1.4. Propriétés d'une probabilité	7
1.5. Exemples.....	9
1.5.1. Probabilité de coïncidence	9
1.5.2. Probabilité d'extinction	9
1.6. Exercices	10
2 Variables aléatoires	11
2.1. Définitions.....	11
2.2. Exemples.....	13
2.3. Opérations sur les variables aléatoires.....	14
2.4. Fonction de distribution	16
2.4.1. Définitions	16
2.4.2. Propriétés.....	17
2.4.3. Types de variable aléatoire	18
2.4.4. Théorème de représentation de Skorokhod	20
2.5. Vecteurs aléatoires	21
2.6. Fonctions de variables aléatoires.....	23
2.7. Exercices	25
3 Indépendance	27
3.1. Définitions.....	27
3.2. Lemmes de Borel-Cantelli.....	28
3.3. Expansion dyadique d'un nombre dans $(0, 1]$	30
3.4. Loi 0-1 de Kolmogorov	32
3.5. Exercices	34

4	Espérance	37
4.1.	Définitions.....	37
4.1.1.	Espérance d'une v.a. étagée	38
4.1.2.	Espérance d'une v.a. positive.....	39
4.1.3.	Espérance d'une v.a. quelconque	41
4.2.	Propriétés.....	41
4.3.	Espaces L^p	49
4.4.	Exercices	53
5	Modes de convergence et lois des grands nombres	55
5.1.	Définitions.....	55
5.2.	Lois des grands nombres.....	56
5.3.	Relations entre modes de convergence.....	59
5.4.	Intégrabilité uniforme	66
5.5.	Convergence en loi.....	70
5.6.	Exercices	73
6	Fonction caractéristique et théorème limite central	77
6.1.	Fonction caractéristique.....	77
6.2.	Théorèmes d'unicité et de continuité.....	79
6.3.	Méthode des moments	87
6.4.	Théorème limite central.....	89
6.5.	Exercices	92
7	Espérance conditionnelle et martingales	95
7.1.	Définition de l'espérance conditionnelle.....	95
7.1.1.	Cas de deux v.a. étagées	95
7.1.2.	Cas de deux v.a. conjointement absolument continues.....	96
7.1.3.	Cas d'une v.a. par rapport à une sous-tribu.....	97
7.2.	Propriétés de l'espérance conditionnelle	99
7.3.	Martingales	100
7.3.1.	Définitions	100
7.3.2.	Exemples	101
	Exemple 1 : Somme de v.a. indépendantes	101
	Exemple 2 : Produit de v.a. indépendantes.....	101
	Exemple 3 : Rapport de vraisemblance	102
7.3.3.	Interprétation dans le contexte d'un jeu de hasard	102
7.4.	Temps d'arrêt	103
7.5.	Marches aléatoires	106
7.5.1.	Marche aléatoire asymétrique	106
7.5.2.	Temps espéré pour écrire un texte.....	109
7.5.3.	Marche aléatoire symétrique	110

7.6. Théorèmes de convergence des martingales.....	111
7.7. Sous-martingales et sur-martingales.....	120
7.7.1. Définitions et exemples.....	120
7.7.2. Propriétés.....	121
7.8. Exercices.....	123
8 Introduction au mouvement brownien et aux diffusions	129
8.1. Mouvement brownien standard.....	129
8.2. Construction du mouvement brownien standard.....	131
8.3. Mouvement brownien avec dérive et variance.....	132
8.4. Mouvement brownien géométrique.....	133
8.5. Formule de Black-Scholes.....	133
8.6. Diffusions.....	135
8.7. Formule d'Ito.....	135
8.8. Exercices.....	137
9 Corrigés d'exercices	139
Corrigés d'exercices du chapitre 1.....	139
Corrigés d'exercices du chapitre 2.....	140
Corrigés d'exercices du chapitre 3.....	142
Corrigés d'exercices du chapitre 4.....	143
Corrigés d'exercices du chapitre 5.....	144
Corrigés d'exercices du chapitre 6.....	147
Corrigés d'exercices du chapitre 7.....	148
Corrigés d'exercices du chapitre 8.....	153
Bibliographie	155
Index	157