

# Table des matières

Avant-propos	i
Table des figures	xiii
<b>1 Chaînes de Markov à temps discret</b>	<b>1</b>
1.1 Introduction	1
1.2 *Exemples	2
1.2.1 Modèle d'Ehrenfest en mécanique statistique	2
1.2.2 Modèle de Wright-Fisher en génétique des populations	5
1.2.3 Modèle de bonus-malus en assurance automobile	6
1.2.4 Modèle de maintenance en théorie de la fiabilité	7
1.3 Définitions	8
1.3.1 Chaîne de Markov à temps discret	8
1.3.2 Matrice de transition en $n$ pas	9
1.3.3 Exemple : le temps d'un jour au suivant	11
1.3.4 Exemple : le temps sur deux jours consécutifs	12
1.3.5 Chaîne de Markov sur deux états	13
1.4 Méthode de conditionnement	15
1.4.1 Exemple : promenade aléatoire dans un labyrinthe	15
1.4.2 Exemple : jeu de pile ou face	17
1.4.3 Exemple : ruine du joueur	19
1.5 Processus de branchement	22
1.5.1 Probabilité d'extinction	22
1.5.2 Distribution limite de la taille de la population	27
1.5.3 Ruine du joueur contre un adversaire infiniment riche	30
1.6 Classification des états	32
1.6.1 Définitions	32
1.6.2 Exemples	32
1.6.3 Critères de classification	35

1.6.4	Partition des états . . . . .	36
1.6.5	Exemple de partition des états . . . . .	37
1.7	Théorème ergodique et distribution stationnaire . . . . .	38
1.7.1	Théorème ergodique . . . . .	38
1.7.2	Distribution stationnaire . . . . .	40
1.7.3	Matrice de transition doublement stochastique . . . . .	40
1.7.4	Théorème sur la distribution stationnaire . . . . .	41
1.7.5	Chaîne irréductible apériodique à espace d'états fini . . . . .	41
1.7.6	Exemple : retour sur le temps d'un jour au suivant . . . . .	41
1.7.7	Exemple : modèle de maintenance . . . . .	42
1.7.8	Exemple : bonus-malus pour l'assurance-automobile . . . . .	43
1.7.9	Exemple : marche aléatoire sur les entiers . . . . .	45
1.7.10	Exemple : chaîne avec plusieurs classes d'états . . . . .	46
1.7.11	Exemple : promenade aléatoire sur un échiquier . . . . .	49
1.8	*Démonstrations . . . . .	51
1.8.1	Critères de classification . . . . .	51
1.8.2	Proposition 1 sur la partition des états . . . . .	53
1.8.3	Proposition 2 sur la partition des états . . . . .	54
1.8.4	Proposition 3 sur la partition des états . . . . .	56
1.8.5	Théorème sur la distribution stationnaire . . . . .	56
1.8.6	Théorème ergodique . . . . .	59
1.8.7	Chaîne irréductible apériodique à espace d'états fini . . . . .	64
1.9	*Annexe . . . . .	66
1.9.1	Lemme 1 sur la limite d'une moyenne . . . . .	66
1.9.2	Lemme 2 sur la limite d'une somme . . . . .	66
1.9.3	Lemme 3 sur la condition d'apériodicité . . . . .	67
1.10	Exercices . . . . .	69
<b>2</b>	<b>Chaînes de Markov à temps continu</b>	<b>83</b>
2.1	Description générale . . . . .	83
2.1.1	Retour sur les chaînes à temps discret . . . . .	83
2.1.2	Chaînes à temps continu . . . . .	85
2.1.3	Minimum de variables de loi exponentielle . . . . .	88
2.1.4	Conditionnement sur le premier changement d'état . . . . .	89
2.1.5	Exemple : maintenance de rampes mobiles . . . . .	90
2.1.6	Hypothèse supplémentaire sur les changements d'état . . . . .	92
2.1.7	Probabilités de transition infinitésimales . . . . .	93
2.2	Chaînes à espace d'états fini . . . . .	94
2.2.1	Générateur et probabilités de transition . . . . .	94
2.2.2	Exemple : retour sur la maintenance de rampes mobiles . . . . .	97

2.3	Processus de Poisson . . . . .	99
2.3.1	Description générale . . . . .	99
2.3.2	Nombre d'arrivées dans un intervalle de temps . . . . .	100
2.3.3	Distribution des temps d'arrivée . . . . .	102
2.3.4	Arrivée d'événements d'un type donné . . . . .	103
2.3.5	Arrivée d'événements de deux types . . . . .	104
2.3.6	Distribution conditionnelle des temps d'arrivée . . . . .	104
2.4	Processus de mort . . . . .	106
2.4.1	Description générale . . . . .	106
2.4.2	Processus de mort linéaire . . . . .	106
2.4.3	Processus de naissance de Yule . . . . .	108
2.4.4	*Processus de coalescence . . . . .	109
2.5	Processus de naissance et de mort . . . . .	112
2.5.1	Description générale . . . . .	112
2.5.2	Processus à temps de vie infini . . . . .	113
2.5.3	Systèmes d'attente . . . . .	113
2.5.4	Équation progressive de Kolmogorov . . . . .	114
2.5.5	Processus linéaire avec immigration . . . . .	116
2.5.6	*Processus linéaire sans immigration . . . . .	117
2.5.7	*Équation rétrograde de Kolmogorov . . . . .	120
2.6	Distribution stationnaire et théorème ergodique . . . . .	121
2.6.1	Définition d'une distribution stationnaire . . . . .	121
2.6.2	Exemple : promenade aléatoire sur des sous-ensembles . . . . .	122
2.6.3	Exemple : comptoirs de service en série . . . . .	122
2.6.4	Processus de naissance et de mort stationnaire . . . . .	124
2.6.5	Système d'attente stationnaire $M/M/1$ . . . . .	126
2.6.6	Système d'attente stationnaire $M/M/\infty$ . . . . .	128
2.6.7	Théorème ergodique . . . . .	129
2.7	*Démonstrations . . . . .	129
2.7.1	Processus à temps de vie infini . . . . .	129
2.7.2	Théorème ergodique . . . . .	130
2.7.3	Lemme sur la continuité des probabilités de transition . . . . .	133
2.8	Exercices . . . . .	135
<b>3</b>	<b>Processus de renouvellement</b> . . . . .	<b>145</b>
3.1	Description générale . . . . .	145
3.2	Théorèmes de renouvellement . . . . .	146
3.2.1	Introduction . . . . .	146
3.2.2	Théorème de renouvellement élémentaire . . . . .	146
3.2.3	Formule de Wald . . . . .	147

3.2.4	Exemple : réclamations d'assurance . . . . .	148
3.2.5	Exemple : remplacement d'un appareil . . . . .	148
3.2.6	Théorème de renouvellement à temps discret . . . . .	151
3.2.7	Théorème de renouvellement à temps continu . . . . .	151
3.3	Distributions limites . . . . .	152
3.3.1	Âge et temps de vie résiduel et total . . . . .	152
3.3.2	Distributions limites à temps discret . . . . .	152
3.3.3	Distributions limites à temps continu . . . . .	155
3.3.4	Processus de renouvellement stationnaire . . . . .	157
3.3.5	Exemple : temps d'inter-arrivée de loi uniforme . . . . .	157
3.3.6	Exemple : temps d'inter-arrivée de loi exponentielle . . . . .	158
3.4	Processus semi-markovien . . . . .	159
3.4.1	Extension du théorème ergodique . . . . .	159
3.4.2	Exemple : principe de Peter . . . . .	160
3.4.3	Processus de renouvellement avec alternance . . . . .	160
3.4.4	Exemple : compteur de particules . . . . .	161
3.4.5	Système d'attente $M/G/1$ . . . . .	161
3.5	*Moyennes temporelles limites . . . . .	165
3.5.1	Moyennes temporelles à temps discret . . . . .	165
3.5.2	Moyennes temporelles à temps continu . . . . .	167
3.6	*Démonstrations . . . . .	169
3.6.1	Théorème de renouvellement élémentaire . . . . .	169
3.6.2	Théorème de renouvellement à temps discret . . . . .	171
3.6.3	Théorème de renouvellement dans le cas stationnaire . . . . .	173
3.6.4	Théorème ergodique pour un processus semi-markovien . . . . .	174
3.7	Exercices . . . . .	176
<b>4</b>	<b>Introduction aux martingales</b> . . . . .	<b>183</b>
4.1	Définitions et exemples . . . . .	183
4.1.1	Définition d'une martingale . . . . .	183
4.1.2	Exemple : marche aléatoire symétrique . . . . .	184
4.1.3	Exemple : prix juste d'une option d'achat . . . . .	185
4.1.4	Exemple : modèle de Wright-Fisher . . . . .	185
4.1.5	Exemple : processus de branchement . . . . .	186
4.1.6	Martingale par rapport à une suite de variables . . . . .	187
4.1.7	Exemple : marche aléatoire asymétrique . . . . .	187

4.2	Martingale arrêtée . . . . .	188
4.2.1	Temps d'arrêt . . . . .	188
4.2.2	Théorème d'arrêt . . . . .	188
4.2.3	Exemple : marche aléatoire symétrique arrêtée . . . . .	189
4.2.4	Exemple : marche aléatoire asymétrique arrêtée . . . . .	191
4.2.5	Exemple : martingale classique de doubler la mise . . . . .	193
4.2.6	*Preuve du théorème d'arrêt . . . . .	194
4.3	Exercices . . . . .	196
<b>5</b>	<b>Introduction au mouvement brownien</b>	<b>199</b>
5.1	Définitions et exemples . . . . .	199
5.1.1	Introduction . . . . .	199
5.1.2	Définition du mouvement brownien standard . . . . .	200
5.1.3	Construction du mouvement brownien standard . . . . .	201
5.1.4	Mouvement brownien avec dérive et écart-type . . . . .	202
5.2	*Mouvement brownien géométrique . . . . .	204
5.2.1	Description générale . . . . .	204
5.2.2	Exemple : seuil d'exercice d'une option d'achat . . . . .	205
5.2.3	Formule de Black-Scholes . . . . .	206
5.2.4	Exemple : prix juste d'une option d'Apple . . . . .	208
5.3	*Exercices . . . . .	208
<b>6</b>	<b>Corrigés des exercices</b>	<b>209</b>
	Avertissement . . . . .	209
	Corrigés du chapitre 1 . . . . .	209
	Corrigés du chapitre 2 . . . . .	231
	Corrigés du chapitre 3 . . . . .	246
	Corrigés du chapitre 4 . . . . .	257
	Corrigés du chapitre 5 . . . . .	260
	<b>Bibliographie</b>	<b>263</b>
	<b>Index</b>	<b>265</b>