Chapitre 1

Chaînes de Markov à temps discret

1.1 Introduction

Un *processus stochastique* est une suite de variables aléatoires indicées par le temps. Le cas le plus simple est celui d'une suite de variables aléatoires indépendantes. Ce sont des variables aléatoires qui n'ont aucune influence les unes sur les autres. C'est le sujet qu'on étudie dans un premier cours de probabilités après avoir introduit les notions fondamentales d'événement, de probabilité, d'indépendance, de variable aléatoire et d'espérance. Le tout culmine avec la loi des grands nombres, qui permet d'interpréter l'espérance comme la moyenne de valeurs observées à long terme, indépendamment et dans les mêmes conditions, et le théorème limite central, qui garantit que cette moyenne est la valeur prise par une variable aléatoire dont la distribution de probabilité s'approche de plus en plus d'une loi normale. Ainsi, si on lance une pièce de monnaie bien balancée un grand nombre de fois représenté par n, indépendamment et dans les mêmes conditions, on s'attend à ce que la proportion de fois qu'on obtienne face soit près de $1/2$ et que cette proportion suive approximativement une loi normale d'espérance égale à $1/2$ et de variance donnée par $1/(4n)$.

Le cas le plus simple d'une suite de variables aléatoires dépendantes est celui où les valeurs prises par les variables qui suivent n'importe quelle variable en particulier, étant donné la valeur prise par cette variable, sont indépendantes des valeurs prises par les variables qui précèdent. Autrement dit, le futur étant donné le présent est indépendant du passé. Le processus possède alors la propriété dite *markovienne*, en mémoire du mathématicien russe Andreï Markov (1856-1922).

Lorsque l'espace des états du processus est fini ou encore infini dénombrable, on est en présence d'une *chaîne de Markov*, qui peut être à temps discret ou à temps continu. Le résultat le plus important sur les chaînes de Markov est le théorème ergodique. Il décrit en général ce qui se passe à long terme, c'est-à-dire la distribution de probabilité limite de la chaîne sur les différents états lorsque cette distribution existe, et la proportion moyenne limite de temps que la chaîne passe dans chaque état, et ce selon l'état initial. Il permet de comprendre le comportement de la chaîne sur une longue période de temps. C'est l'objectif principal du chapitre 1 pour les chaînes à temps discret.

Ainsi, la marche aléatoire décrite en faisant un pas à gauche ou à droite chaque fois qu'on obtient pile ou face, respectivement, en lançant une pièce de monnaie un grand nombre de fois indépendamment et dans les mêmes conditions, est une chaîne de Markov à temps discret. Cette marche aléatoire reste une chaîne de Markov dans le cas où un pas à faire doit être annulé à cause de la présence d'un obstacle, un mur par exemple. Dans un tel contexte, il est intéressant de savoir quelle est la probabilité d'être à une position donnée après un très long moment, ou encore quelle proportion moyenne de temps est passée à cette position sur une longue période de temps. C'est le type de questions qu'on se pose souvent lorsqu'on est en présence d'une chaîne de Markov.

De nombreuses situations réelles sont modélisées par des chaînes de Markov, que ce soit en biologie, en physique, en économie ou en recherche opérationnelle. Ce chapitre commence donc par des exemples pour illustrer les principaux concepts et résultats qui sont développés par la suite.

1.2 *Exemples

1.2.1 Modèle d'Ehrenfest en mécanique statistique

On considère un système hermétiquement fermé constitué de deux compartiments, représentés par A et B, contenant ensemble un nombre m de particules d'un gaz. Les particules à l'intérieur du système ne peuvent pas en sortir et aucune autre particule ne peut y entrer. La cloison séparant les deux compartiments n'est cependant pas parfaitement étanche et les particules, qui sont en mouvement permanent, peuvent passer d'un compartiment à l'autre. Cela peut être représenté par une ouverture dans la cloison de dimension du même ordre de grandeur que celle d'une particule. Ce modèle de diffusion est illustré dans la figure 1.

On peut aussi imaginer que les m particules représentent des puces et les compartiments A et B, des chiens sur lesquels elles vivent.

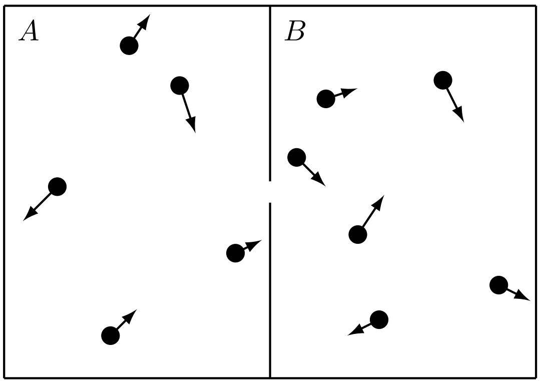

FIGURE 1. Modèle de diffusion d'Ehrenfest.

On fait les hypothèses suivantes sur le passage des particules d'un compartiment à l'autre :

- un seul passage à la fois peut se produire ; et

- chaque particule a une chance égale à toute autre de changer de compartiment.

Le temps est calculé en nombre de passages. L'état du système après n passages, pour $n \geq 0$, est décrit par le nombre de particules dans le compartiment A, représenté pat X_n. Ce nombre est compris entre 0 et m.

La probabilité de transition pour que $X_{n+1} = j$ étant donné que $X_n = i$ est notée P_{ij}, c'est-à-dire

$$P_{ij} = Pr(X_{n+1} = j \mid X_n = i),$$

pour $i, j = 0, 1, \ldots, m$. Dans le cas présent, cette probabilité de transition est donnée par

$$P_{ij} = \begin{cases} \dfrac{i}{m} & \text{si } j = i - 1 \text{ pour } 1 \leq i \leq m, \\[2ex] \dfrac{m-i}{m} & \text{si } j = i + 1 \text{ pour } 0 \leq i \leq m - 1, \\[2ex] 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

La matrice $P = (P_{ij})$, avec l'entrée P_{ij} sur la ligne i et dans la colonne j, est la matrice de transition.

La matrice de transition et la distribution de X_0 décrivent entièrement le processus, c'est-à-dire les événements qui peuvent se produire au cours du temps et leurs probabilités. Le processus est en fait une chaîne de Markov à temps discret.

Voici le type de questions auxquelles on va essayer de répondre dans ce chapitre.

Question 1. Il est intéressant de savoir ce qui se passe à long terme. La probabilité de trouver j particules dans le compartiment A au temps n étant donné qu'il y en a i initialement converge-t-elle lorsque n augmente et si la réponse est positive, quelle est la limite ? En supposant la convergence, la limite prédite est donnée par

$$\lim_{n\to\infty} Pr\,(X_n = j \mid X_0 = i) = \binom{m}{j}\left(\frac{1}{2}\right)^m,$$

pour $j = 0, 1, \ldots, m$. En effet, par symétrie, chaque particule devrait avoir à long terme une probabilité $1/2$ d'être dans A plutôt que dans B, et ce indépendamment de la position des autres particules. On est alors dans le contexte de m épreuves indépendantes de Bernoulli avec $1/2$ comme probabilité de succès à chaque épreuve. Le nombre total de succès suit en conséquence une loi binomiale. Il est à noter que la limite prédite ne dépend pas de i, l'état initial du système.

Question 2. Il faut cependant faire attention au phénomène de périodicité. Ici, le nombre de particules dans le compartiment A prend en alternance des valeurs paires et impaires. Par conséquent, une probabilité de transition ne peut converger que vers 0. Dans le cas extrême où $m = 1$, par exemple, on obtient

$$Pr\,(X_n = 1 \mid X_0 = 1) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair,} \\ 1 & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

Cette probabilité de transition du temps 0 au temps n ne converge pas, puisque les valeurs 0 et 1 alternent. Toutefois, la moyenne de ces probabilités du temps 0 jusqu'au temps $n-1$ inclusivement converge, et sa limite est donnée par

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} Pr\,(X_k = 1 \mid X_0 = 1) = \frac{1}{2}.$$

Il est à noter que cette limite est celle prédite par la loi binomiale.

Question 3. En général on s'attend toujours à ce que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}Pr\left(X_k=j\mid X_0=i\right)=\binom{m}{j}\left(\frac{1}{2}\right)^m.$$

Cette limite représente la proportion moyenne de temps à long terme avec j particules dans le compartiment A. En effet, on a

$$Pr\left(X_k=j\mid X_0=i\right)=E\left(\mathbf{1}_{\{X_k=j\}}\mid X_0=i\right),$$

en utilisant la variable aléatoire indicatrice

$$\mathbf{1}_{\{X_k=j\}}=\begin{cases}1 & \text{si } X_k=j,\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Par la linéarité de l'espérance, on obtient alors

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}Pr\left(X_k=j\mid X_0=i\right)=E\left(\frac{N_j(n)}{n}\;\Big|\;X_0=i\right),$$

où

$$N_j(n)=\sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{1}_{\{X_k=j\}}$$

représente le temps passé avec j particules dans le compartiment A à partir du temps 0 jusqu'au temps $n-1$ inclusivement.

1.2.2 Modèle de Wright-Fisher en génétique des populations

Le modèle de Wright-Fisher est le modèle le plus utilisé en génétique des populations. On considère une population de N gènes à générations séparées sans chevauchement. En l'absence de sélection et de mutation, les N gènes de la génération $n+1$ sont obtenus en faisant des copies de N gènes tirés au hasard avec remise dans la génération n. Le modèle est neutre, car les chances de reproduction sont les mêmes, quel que soit le type de gène. De plus, les copies sont identiques aux gènes originaux.

On s'intéresse au nombre de gènes d'un type donné, disons A. On définit X_n comme le nombre de gènes de type A à la génération $n\geq 0$. Étant donné que $X_n=i$, la probabilité de tirer au hasard un gène de type A dans la génération n est i/N. La loi conditionnelle du nombre de gènes de type A à la génération $n+1$ est binomiale de paramètres N et i/N. En effet, pour $0\leq k\leq N$, on a

$$Pr\left(X_{n+1}=k\mid X_n=i\right)=\binom{N}{k}\left(\frac{i}{N}\right)^k\left(1-\frac{i}{N}\right)^{N-k}.$$

Voici quelques questions qui se posent au sujet de cette chaîne de Markov à temps discret.

Question 1. L'espérance du nombre de gènes de type A à la génération $n+1$ étant donné i gènes de type A à la génération $n \geq 0$ est i. En effet, on a alors

$$E\left(X_{n+1} \mid X_n = i\right) = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} \left(\frac{i}{N}\right)^k \left(1 - \frac{i}{N}\right)^{N-k} = N\left(\frac{i}{N}\right) = i.$$

Cette propriété, qui découle de la neutralité du modèle, garantit que X_n pour $n \geq 0$ est une martingale. Les conséquences qu'on peut tirer de cette propriété est le sujet du chapitre 4.

Question 2. Les valeurs 0 et N pour X_n, qui correspondent à l'extinction de A et la fixation de A, respectivement, sont des états absorbants dans le sens qu'on y reste certainement une fois qu'on les a atteint. En effet, on a

$$Pr\left(X_{n+1} = 0 \mid X_n = 0\right) = Pr\left(X_{n+1} = N \mid X_n = N\right) = 1.$$

On peut se demander si ces états sont ultimement atteints avec certitude. Cela est le cas si

$$\lim_{n\to\infty} Pr\left(1 \leq X_n \leq N-1 \mid X_0 = i\right) = 0.$$

En supposant cette condition vérifiée, on peut se demander quelle est la probabilité d'atteindre ultimement l'état N plutôt que l'état 0 à partir de l'état initial i. Une façon d'obtenir la réponse est de distinguer les gènes initiaux, disons $G_1, \ldots, G_N$, dont $G_1, \ldots, G_i$ sont de type A. Le nombre de copies de G_j pour chaque $j = 1, \ldots, N$ est ultimement 0 ou N avec certitude. Tous les gènes sont donc ultimement des copies du même gène initial, qui est un gène choisi au hasard parmi tous les gènes initiaux par symétrie. La probabilité que ce gène soit de type A est donc i/N. Par conséquent, on devrait avoir

$$\lim_{n\to\infty} Pr\left(X_n = N \mid X_0 = i\right) = \frac{i}{N}.$$

La confirmation de ce résultat est l'un des objectifs du chapitre 1.

1.2.3 Modèle de bonus-malus en assurance automobile

En assurance automobile, la prime d'un assuré peut diminuer si aucune réclamation n'est faite durant une période donnée ou augmenter si une ou plusieurs réclamations sont soumises durant une certaine période. Les réclamations font suite à des accidents de la route qui se produisent au hasard dans le temps.

L'arrivée d'événements au hasard est décrite dans le chapitre 2 par un processus de Poisson, qui est l'exemple le plus important de chaîne de Markov à temps continu. La caractéristique du processus est que le nombre de fois que l'événement se réalise dans un intervalle de temps donné est de loi de Poisson et qu'il est indépendant du nombre d'événements dans n'importe quel autre intervalle de temps disjoint du premier.

Supposons que la classe d'un assuré est mise à jour après chaque année de conduite automobile. Elle est alors augmentée du nombre de réclamations durant l'année s'il y en a eu, mais diminuée de 1 s'il n'y en a pas eu. La classe initiale est 0 et elle ne peut pas diminuer davantage. Si X_n représente la classe d'un assuré après un nombre d'années de conduite automobile égal à $n \geq 0$, alors on a

$$Pr\left(X_{n+1} = i + k \mid X_n = i\right) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

pour $k \geq 1$ et $i \geq 0$, mais

$$Pr\left(X_{n+1} = i - 1 \mid X_n = i\right) = Pr\left(X_{n+1} = 0 \mid X_n = 0\right) = e^{-\lambda},$$

pour $i \geq 1$. Le paramètre λ représente un taux de réclamation. Sa valeur dépend du groupe de l'assuré.

Ici, la principale question qui se pose au sujet de cette chaîne de Markov à temps discret est de savoir si

$$\lim_{n \to \infty} Pr\left(X_n = j \mid X_0 = 0\right) = \pi_j \geq 0,$$

et d'identifier la limite si elle existe. Cette limite π_j devrait correspondre à la proportion moyenne de temps en années à long terme qu'un assuré passe dans la classe j.

1.2.4 Modèle de maintenance en théorie de la fiabilité

Un dispositif peut être ou bien en état de fonctionnement, ou bien en état de réparation. On fait l'hypothèse que les temps de fonctionnement et de réparation sont des variables aléatoires indépendantes d'espérances respectives μ et ν. De plus, les périodes de fonctionnement et de réparation se succèdent en alternance. Elles se terminent respectivement par une défaillance ou par une remise en service.

Le nombre de changements d'état au cours du temps est un processus de renouvellement tel que défini au chapitre 3. Quant à l'état du système X_t, pour tout instant $t \geq 0$, il correspond à un processus semi-markovien.

Dans le cas où les temps de fonctionnement et de réparation sont de loi exponentielle, le nombre de changements d'état et l'état du système au cours du temps sont des chaînes de Markov à temps continu telles qu'étudiées dans le chapitre 2. La première est en fait un processus de naissance sur un nombre infini d'états.

Le nombre de changements d'état est évidemment un processus croissant vers l'infini. De plus, on s'attend à ce que le système soit en état de fonctionnement une proportion moyenne de temps à long terme donnée par $\mu/(\mu+\nu)$. Cela reste cependant à confirmer.

1.3 Définitions

1.3.1 Chaîne de Markov à temps discret

Une *chaîne de Markov à temps discret* est une suite de variables aléatoires $\{X_n\}_{n\geq 0}$ à valeurs dans un espace d'états (fini ou infini) dénombrable (habituellement représentés par les entiers $0, 1, 2, \ldots$) telle que

$$Pr\left(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_n = i_n, \ldots, X_0 = i_0\right) = Pr\left(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_n = i_n\right),$$

pour tous les états $i_{n+1}, i_n, \ldots, i_0$ et tout entier $n \geq 0$. C'est la *propriété markovienne.*

L'indice n représente habituellement le temps. Lorsque les *probabilités de transition* ci-dessus sont *stationnaires* (c'est-à-dire les mêmes pour tout entier $n \geq 0$), la chaîne est dite *homogène.* C'est l'hypothèse faite à partir de maintenant à moins d'indication contraire.

La matrice $P = (P_{ij})$ dont l'entrée sur la rangée i et dans la colonne j est donnée par

$$P_{ij} = Pr\left(X_{n+1} = j \mid X_n = i\right),$$

notée aussi parfois $P_{i,j}$, pour tous les états i et j, est appelée la *matrice de transition*, sous-entendu en un pas. La matrice de transition et la distribution de X_0 déterminent complètement la chaîne, c'est-à-dire toutes les distributions conjointes. En effet, la fonction de masse conjointe des variables $X_0, \ldots, X_n$ peut être calculée en considérant toutes les transitions de l'instant 0 à l'instant n tel qu'illustré dans la figure 2.