Chapitre 1

Fonctions holomorphes, fonctions analytiques

1.1 Préliminaires

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ et

$$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}, \; z \longmapsto f(z) = w,$$

une fonction complexe d'une variable complexe $z = x + iy$, $(x, y \in \mathbb{R})$.

Définition 1.1.1 *On dit que la fonction f est uniforme si à chaque valeur de z ne correspond qu'une seule valeur de w. Sinon, elle est dite multiforme.*

Exemples de fonctions uniformes :

a) La *fonction linéaire* : $w = az + b$, $(a, b \in \mathbb{C})$.
b) La *fonction exponentielle* : $w = e^z$. Par définition, on a

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Lorsque z est réel c'est-à-dire $z = x$, nous retrouvons la fonction exponentielle $e^z = e^x$. La fonction e^z est périodique, de période $2\pi i$. En outre, on a

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}.$$

En écrivant

$$z = r(\cos\theta + i \sin\theta) = re^{i\theta},$$

où $r = |z|$ et $\theta = \arg z$, on obtient la formule de Moivre

$$z^n = r^n e^{in\theta},$$

et les formules d'Euler

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \qquad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}.$$

c) Les *fonctions circulaires*. Par extension des définitions dans le cas réel, on pose

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

et de là

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \qquad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Les relations entre les fonctions trigonométriques réelles s'étendent au cas complexe. Les fonctions $\cos z$ et $\sin z$ sont périodiques, de période 2π. Elles ont les mêmes zéros que les fonctions réelles correspondantes. Signalons que les fonctions $\cos z$ et $\sin z$ ne sont pas bornées (voir exercice 1.5.1).

d) Les *fonctions hyperboliques*. Nous les définirons par extension du cas réel, en posant

$$\cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}, \qquad \sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2},$$

et de là

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \qquad \coth\ z = \frac{\cosh z}{\sinh z}.$$

Les fonctions $\cosh z$ et $\sinh z$ sont périodiques, de période $2\pi i$ et sont, respectivement, paires et impaires. Les relations entre les fonctions hyperboliques réelles s'étendent au cas complexe.

Remarque 1.1.2 *On peut définir les fonctions $e^z, \cos z, \sin z, \cosh z, \sinh z$, par leurs développements en série entière qui convergent dans tout le plan complexe :*

$$\begin{aligned}
e^z &= 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots \\
\cos z &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots \\
\sin z &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots \\
\cosh z &= 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots \\
\sinh z &= z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots
\end{aligned}$$

Exemples de "fonctions" multiformes :

a) La *fonction racine carrée* : $w = \sqrt{z}$. Considérons

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto w : w^2 = z.$$

Il est clair que f n'est pas une fonction : à chaque valeur de $z \neq 0$, correspond deux valeurs de w. Lorsque l'on tourne autour du point $z = 0$, par exemple le long d'un cercle centré en 0, alors w change de signe. En effet, soit

$$z = re^{i\theta},\ w = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}},$$

où $r = |z|$ et $\theta = \arg z$. On veut tourner autour de $z = 0$, donc r sera petit et θ variera entre 0 et 2π. Si $\theta = 0$, alors $w = \sqrt{r}e^0 = \sqrt{r}$. Si $\theta = 2\pi$, alors $w = \sqrt{r}e^{\pi i} = -\sqrt{r}$. On peut utiliser le fait que l'argument θ d'un nombre complexe z est défini à $2k\pi$ près. On pose $\theta = \theta_0 + 2k\pi$ et dès lors la fonction $w = \sqrt{z}$ prend deux valeurs distinctes w_1 et w_2 pour chaque valeur de $z \neq 0$: $w_1 = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta_0}{2}}$, $w_2 = \sqrt{r}e^{i(\frac{\theta_0}{2}+\pi)} = -w_1$. On dit que la fonction $w = \sqrt{z}$ a deux branches ou déterminations. Donc si z décrit un cercle entourant 0, la fonction $\sqrt{z}$ est multiforme et passe de manière continue d'une branche à l'autre ; de $w = \sqrt{r}$ à $w = -\sqrt{r}$. Si on refait de nouveau un tour complet c'est-à-dire de $\theta = 2\pi$ à $\theta = 4\pi$, alors on obtient $\sqrt{r}$ c'est-à-dire la valeur de départ. On dit que le point $z = 0$ est un point de branchement ou de ramification de la fonction $w = \sqrt{z}$. A distance finie, le point $z = 0$ est le seul point de branchement de $\sqrt{z}$, car la considération de tout cercle autour d'un point $z \neq 0$ ne conduit à aucun changement de branches de $\sqrt{z}$. On peut rendre la fonction $\sqrt{z}$ uniforme en faisant une coupure le long de la demi droite issue de $z = 0$.

b) *Logarithme complexe*. Soit $z \in \mathbb{C}$. Sous forme trigonométrique z s'écrit sous la forme

$$z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta), \quad r > 0$$

Posons $Z = X + iY$. L'équation $e^Z = z$, s'écrit $e^X e^{iY} = re^{i\theta}$ ou sous la forme

$$e^X(\cos Y + i\sin Y) = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

D'où, $e^X = r$ et $Y = \theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Dès lors,

$$Z = \log z = \ln r + i\theta + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}$$

La fonction $\log z$ est définie comme étant la fonction réciproque de la fonction exponentielle. On montre (voir exercice 1.5.2, a)) que la fonction $\log z$ est multiforme, à une infinité de déterminations. La détermination principale de $\log z$ est définie pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ par

$$\log z = \ln r + i\theta, \qquad -\pi \leq \theta < \pi.$$

La détermination principale du logarithme est une bijection de $\mathbb{C}^*$ sur la bande horizontale $\triangle$ du plan complexe, définie par $Z = X+iY \in \triangle \Longleftrightarrow -\pi \leq Y < \pi$ (voir exercice 1.5.2, b) pour le détail). Au lieu de choisir $\theta \in [-\pi, \pi[$, on peut prendre θ dans un intervalle quelconque semi-ouvert à droite ou à gauche et d'amplitude 2π, c-à-d., $[a, a+2\pi[$ ou $]a, a+2\pi]$. Soit $Z = X + iY \in \triangle$. On a $e^Z = e^X(\cos Y + i\sin Y)$, le module de e^Z est donc $r = e^X$ et $\theta = Y$ est l'argument satisfaisant à $-\pi \leq \theta \leq \pi$. Dès lors,

$$\log e^Z = \ln r + i\theta = \ln e^X + iY = X + iY = Z,$$

où e^X désigne l'exponentielle réelle. Ainsi une détermination quelconque du logarithme, notée $\log_a : \mathbb{C}^* \longrightarrow \{z : \text{ Im } z \in [a, a+2\pi[\}$, est l'inverse de la fonction exponentielle $\exp : \{z : \text{ Im } z \in [a, a+2\pi[\} \longrightarrow \mathbb{C}^*$, $\forall a \in \mathbb{R}$. Une telle détermination prolonge la fonction logarithme réelle (définie sur $\mathbb{R}_+^*$) avec la condition $0 \in [a, a+2\pi[$ car si $z \in \mathbb{R}_+^*$, $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $\theta = 0$ comme seule valeur. Notons que l'expression $\log z_1 z_2 = \log z_1 + \log z_2$ ne sera pas toujours vraie si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, alors que $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$ est toujours vraie. En fait, on a

$$\log z_1 z_2 = \log z_1 + \log z_2 \pmod{2\pi i},$$

il suffit d'appliquer la formule : $\log z = \ln r + i\theta$, $-\pi \leq \theta < \pi$ car si on n'a pas $-\pi \leq \theta_1 + \theta_2 < \pi$ la formule en question n'est vraie qu'à $2\pi i$ près. La formule ci-dessus fournit également les logarithmes des nombres strictement négatifs. Soit, par exemple, $z = -e$. On a $r = e$, $\theta = -\pi$ et donc $\ln(-e) = 1 - \pi i$. Nous verrons (exercice 1.5.2, c)) des questions liées aux notions de continuité et dérivabilité de toutes ces déterminations.

c) La *fonction puissance* z^α $(\alpha \in \mathbb{C})$. Elle est définie par

$$z^\alpha = e^{\alpha \ln z}.$$

La fonction z^α est (voir exercice 1.5.3) :
- uniforme si α est entier.
- multiforme, à q déterminations, si $\alpha = \pm\frac{p}{q}$, où p et q sont des entiers positifs premiers entre eux.
- multiforme, à une infinité de déterminations, si $\alpha = a + ib$ (a et b non nuls).

Remarque 1.1.3 *Une théorie plus avancée (surfaces de Riemann) permet de décrire de manière rigoureuse le procédé d'uniformisation (pour de plus amples informations, voir chapitre 7).*

Soit

$$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}, \ z \longmapsto f(z),$$

une fonction uniforme et $z_0 \in \Omega$.

Définition 1.1.4 *On dit que $f(z)$ tend vers une limite l lorsque z tend vers z_0 et on écrit*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = l,$$

si et seulement si

$$\forall \varepsilon \; > 0, \; \exists \delta > 0 : |z - z_0| < \delta \Longrightarrow |f(z) - l| < \varepsilon.$$

Quand la limite d'une fonction existe, elle est unique. Les propriétés classiques concernant la limite d'une somme, d'un produit ou d'un rapport de deux fonctions, s'étendent du cas réel au cas complexe.

Remarque 1.1.5 *La fonction $f(z)$ tend vers sa limite indépendamment de la manière dont le point z tend vers z_0. En d'autres termes, si la limite existe, alors lorsque z tend vers z_0 suivant une loi quelconque (par exemple suivant une courbe), $f(z)$ tend vers cette limite.*

Le point à l'infini ∞ est défini par l'image de l'origine par la transformation $t = \frac{1}{z}$. Par définition :

$$\begin{aligned} \lim_{z \to \infty} f(z) = l \quad & \text{si} \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |z| > \delta \Longrightarrow |f(z) - l| < \varepsilon. \\ \lim_{z \to z_0} f(z) = \infty \quad & \text{si} \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \delta 0 : |z - z_0| < \delta \Longrightarrow |f(z)| > \varepsilon. \end{aligned}$$

Notons que si $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = l$, alors $\lim\limits_{z \to z_0} \overline{f(z)} = \bar{l}$. Il en résulte que

$$\lim_{z \to z_0} Ref\,(z) = Re\,(l)\,, \qquad \lim_{z \to z_0} Imf\,(z) = Im\,(l)\,.$$

La réciproque est également vraie.

Définition 1.1.6 *Soit z_0 un point où la fonction f prend la valeur $f\,(z_0)$. On dit que $f(z)$ est continue en z_0 si et seulement si*

$$\lim_{z \to z_0} f\,(z) = f\,(z_0)\,.$$

La fonction $f\,(z)$ est continue dans Ω si et seulement si elle est continue en tout point de Ω.

Les propriétés classiques concernant la somme, le produit et le rapport de fonctions continues s'étendent du cas réel au cas complexe.

1.2 Fonctions différentiables

Définition 1.2.1 *On dit que $f(z)$ est dérivable au point $z \in \Omega$ si et seulement si*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = f'(z),$$

existe, indépendamment de la façon dont h tend vers 0 dans $\mathbb{C}$. Cette limite, notée $f'(z)$, est appelée dérivée de f en z.

Définition 1.2.2 *La fonction f est différentiable en z si et seulement si il existe un nombre complexe $f'(z)$ tel que*

$$\forall h \in \mathbb{C}, \quad f(z+h) = f(z) + f'(z) \cdot h + o(|h|).$$

Les règles de dérivation (somme, produit, quotient) sont les mêmes que celles utilisées en analyse réelle.

Proposition 1.2.3 *La fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est dérivable en z si et seulement si elle est différentiable en z et $f'(z)$ a la même signification dans les deux définitions précédentes.*

Démonstration : voir exercice 1.5.5.

Définition 1.2.4 *La fonction f est dite holomorphe dans Ω si elle est dérivable en tout point de Ω.*

Posons $z = x + iy$, $h = \Delta x + i\Delta y$ et soit $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, où $u(x,y) = Ref(z)$ et $v(x,y) = Imf(z)$, sont des fonctions réelles de deux variables réelles x et y.

Théorème 1.2.5 *La fonction $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ est holomorphe dans Ω si et seulement si u et v sont différentiables dans Ω et satisfont aux conditions (ou équations) de Cauchy-Riemann :*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

En outre, on a

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Démonstration : voir exercice 1.5.6.

Remarque 1.2.6 *Si u et v ne sont pas différentiables, alors les conditions de Cauchy-Riemann sont nécessaires mais pas suffisantes.*

Proposition 1.2.7 *Considérons les deux opérateurs*

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Les équations de Cauchy-Riemann sont équivalentes à l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0.$$

En outre, on a

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(z).$$

Démonstration : voir exercice 1.5.7.

Remarque 1.2.8 *On désigne par $\mathcal{H}(\Omega)$ (ou parfois $\mathcal{O}(\Omega)$), l'ensemble des fonctions holomorphes sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$. On montre que : $\mathcal{H}(\Omega)$ est un espace vectoriel, un anneau (car stable pour la somme et le produit), une sous-algèbre de $\mathcal{C}^1(\Omega)$ et un sous-module fermé de $\mathcal{C}^1(\Omega)$. La composée de deux fonctions holomorphes est holomorphe, l'application réciproque d'un difféomorphisme holomorphe est holomorphe et si une fonction holomorphe possède un logarithme alors celui-ci est holomorphe.*

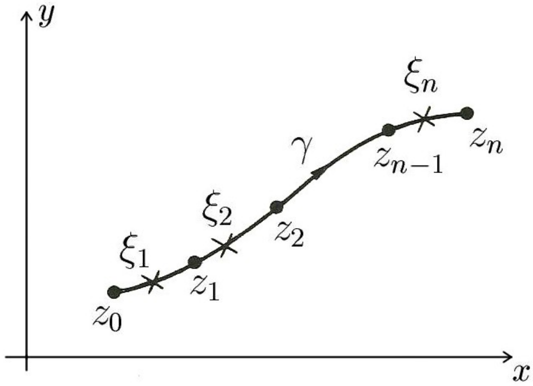
1.3 Intégration des fonctions holomorphes

Définition 1.3.1 *On appelle chemin $\mathcal{C}^1$ par morceaux une application continue $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$, définie sur un intervalle femé $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ et telle qu'il existe une subdivision : $a = \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n = b$, de $[a,b]$ pour laquelle la restriction de γ à chaque intervalle $[\alpha_{k-1}, \alpha_k]$ $(1 \leq k \leq n)$ soit de classe $\mathcal{C}^1$. On dit que le chemin γ est fermé (ou un circuit, ou encore un lacet) si $\gamma(a) = \gamma(b)$.*

Définition 1.3.2 *Soient $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue et $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ un chemin $\mathcal{C}^1$ par morceaux. On appelle intégrale de f le long de γ l'expression*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} \int_{\alpha_{k-1}}^{\alpha_k} f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt.$$

Remarque 1.3.3 *Une autre façon de définir l'intégrale ci-dessus, est la suivante : partageons γ en n morceaux, au moyen des points $z_0, z_1, ..., z_n$. De plus, choisissons un point ξ_k sur chaque arc joignant z_{k-1} à z_k $(1 \leq k \leq n)$.*



On définit la somme

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(z_k - z_{k-1}).$$

La limite obtenue en faisant croître le nombre n de subdivisions, de façon que $\max_{1 \leq k \leq n} |z_k - z_{k-1}|$ tende vers zéro, est appelée intégrale curviligne de $f(z)$ le long de γ et est notée $\int_\gamma f(z)dz$.

Proposition 1.3.4 *Si $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ et $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, alors*

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma (u(x,y)dx - v(x,y)dy) + i\int_\gamma (u(x,y)dy + v(x,y)dx).$$

Démonstration : voir exercice 1.5.16.

La formule ci dessus, est une combinaison linéaire d'intégrales curvilignes réelles. Les propriétés habituelles de ces dernières sont donc conservées.

Si on change le sens du parcours du chemin $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$, l'intégrale change de signe

$$\int_{\gamma^-} f(z)\,dz = -\int_\gamma f(z)dz,$$

où $\gamma(t) = \gamma(a+b-t)$, $t \in [a,b]$; le chemin γ^- se déduit de γ par un changement d'orientation :