Chapitre 1

Généralités

Les fluides se répartissent en deux grandes classes, les liquides et les gaz. Ils se distinguent essentiellement par trois propriétés importantes : le libre parcours moyen λ, c'est-à-dire la distance moyenne parcourue par une molécule entre deux chocs avec une autre, la masse volumique ρ et la compressibilité (Tab. 1.1). De la différence sur les libres parcours moyen découlent des propriétés très différentes (notamment la compressibilité et la viscosité) des liquides et des gaz : toutefois, les équations décrivant le mouvement des fluides sont communes au gaz et aux liquides.

Tab. 1.1: Principales propriétés des liquides et des gaz.

Propriété	Liquide	Gaz
Libre parcours moyen	$(3 < \lambda < 5)$ Å	$(30 < \lambda < 50)$ Å
Masse volumique	$\rho \approx 10^3$ kg.m^{-3}	$\rho \approx 10$ kg.m^{-3}
Compressibilité	Non ($\rho \approx$ constante)	Oui ($\rho \neq$ constante)

1.1 Hypothèse de continuité

Soit une surface $\mathcal{S}$ de volume $\mathcal{V}$ contenant une masse m de fluide. La masse volumique ρ se définit par

$$\rho = \lim_{\mathcal{V}\to 0} \frac{m}{\mathcal{V}}$$

ce qui suppose que la masse volumique est constante sur l'ensemble du volume $\mathcal{V}$. La masse volumique se définit de manière analogue à la dérivée, c'est-à-dire qu'elle correspond à la limite du rapport d'une grandeur sur une quantité infinitésimale, soient ici, une masse et un élément infinitésimal de volume. Cette définition implique que la mécanique des fluides considère des milieux continus. Toutefois les propriétés des fluides résultent du fait qu'ils sont en réalité constitués d'entités discrètes que sont les molécules. La notion de continuité implique que la masse volumique ρ existe quel que soit le volume $\mathcal{V}$ considéré. et qu'il est impossible à une quantité de fluide de quitter un domaine de l'espace pour un autre sans traverser l'espace situé entre ces deux domaines.

1.2 Forces appliquées à un fluide

Sur un volume $\mathcal{V}$ de fluide agissent des forces qui se répartissent en deux classes : les forces de volumes qui agissent en chaque point du fluide et les forces de surface qui agissent en chaque point de la surface $\mathcal{S}$ délimitant le volume $\mathcal{V}$ de fluide étudié. La force de volume, toujours présente dans les cas considérés dans ce cours, résulte de l'accélération de la la pesanteur. Dans certains cas, il peut y en avoir d'autres, comme des forces magnétiques (présentes dans les étoiles), des forces d'inerties (présentes dans les fluides en rotation), etc.

En mécanique du solide, les forces appliqués au système étudié sont toujours liées à la variation de la quantité de mouvement $\vec{p}$ selon le principe fondamental de la dynamique

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{F}_{\text{appliquées}} \,.$$

Puisque le corps est un solide S de masse m constante, nous avons

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m\vec{V}\right) = \underbrace{\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}}_{=\vec{0}} \cdot \vec{V} + m \underbrace{\frac{\mathrm{d}\vec{V}}{\mathrm{d}t}}_{=\vec{A}} = \sum \vec{F}_{\text{appliquées}} \,.$$

où $\vec{V}$ et $\vec{A}$ sont respectivement le vecteur vitesse et le vecteur accélération du solide S. Il reste finalement

$$m\vec{A} = \sum \vec{F}_{\text{appliquées}} \,.$$

Lorsque la masse est conservée, les forces peuvent donc être vues comme le produit d'une masse par une accélération. Par exemple la force de pesanteur est définie comme

$$\vec{F}_g = m\vec{g}$$

où m est la masse du corps considéré et $\vec{g}$ l'accélération de la pensanteur dont le vecteur est toujours dirigé verticalement et de haut en bas (vers le sol). Nous verrons qu'en mécanique des fluides, l'écriture des équations peut être simplifiés en utilisant une force volumique, c'est-à-dire une force par unité de volume, soit

$$\vec{F}_{\mathcal{V}} = \frac{\vec{F}}{\mathcal{V}} = \frac{m\vec{g}}{\mathcal{V}} = \rho\vec{g} \,,$$

où ce n'est donc plus la masse qui intervient mais la masse volumique $\rho = \frac{m}{\mathcal{V}}$. Ici l'indice $_{\mathcal{V}}$ a été porté à la force volumique ; afin de ne pas surcharger les écritures, cet indice sera omis par la suite lorsque le contexte sera suffisamment explicite pour être assuré que c'est bien d'une force volumique dont il s'agit. Les unités d'une force sont

$$[F] = [m] \cdot [g] = \text{ kg} \times \text{ m.s}^{-2} = \text{ N}$$

alors que celles d'une force volumique sont

$$[F_{\mathcal{V}}] = [\rho] \cdot [g] = \text{ kg.m}^{-3} \times \text{ m.s}^{-2} = \text{ kg.m}^{-2}.\text{s}^{-2} = \text{ N.m}^{-3} \,.$$

Les forces de surface, contrairement aux forces de volumes, sont uniquement appliquées au niveau de la surface $\mathcal{S}$ délimitant le volume $\mathcal{V}$ étudié. Prenons l'exemple d'un élément de force $\mathrm{d}\vec{F}$ appliqué sur un élément de surface $\mathrm{d}S$ (Fig. 1.1). L'élément de surface est orienté par un vecteur normal $\vec{n}$ à l'élément de surface $\mathrm{d}S$ et orienté de l'intérieur vers l'extérieur de la surface (un volume $\mathcal{V}$ est toujours délimité par une surface fermée

$\mathcal{S}$). L'élément de force $\mathrm{d}\vec{F}$ peut se décomposer selon la normale $\vec{n}$ à l'élément de surface $\mathrm{d}S$ et selon une direction tangente $\vec{\tau}$ à cet élément $\mathrm{d}S$, soit

$$\mathrm{d}\vec{F} = \underbrace{\mathrm{d}\vec{F}_n}_{\text{normale}} + \underbrace{\mathrm{d}\vec{F}_\tau}_{\text{tangentielle}}$$

où la composante normale correspond à la pression P et la composante tangentielle aux frottements ou à une contrainte de cisaillement.

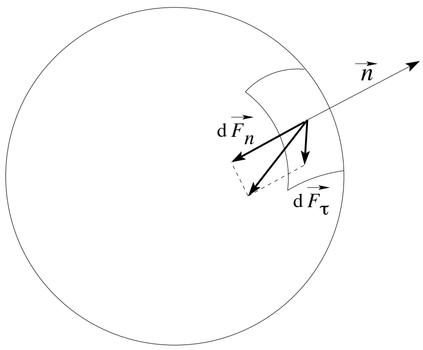


Fig. 1.1: Action d'un élément de force $\mathrm{d}\vec{F}$ sur un élément $\mathrm{d}S$ de la surface fermée $\mathcal{S}$ délimitant le volume $\mathcal{V}$.

Les forces de pression agissent donc perpendiculairement à la surface : elles agissent de l'extérieur vers l'intérieur. Puisque la normale $\vec{n}$ orientant l'élément de surface est de l'intérieur vers l'extérieur, l'élément de force s'écrit

$$\mathrm{d}\vec{F} = -P\,\mathrm{d}S \cdot \vec{n} + \tau\,\mathrm{d}S \cdot \vec{\tau}\,,$$

où $\vec{\tau}$ est ici le vecteur directeur unitaire tangent à la surface S au point d'application de la force $\mathrm{d}\vec{F}$. Le signe moins devant le terme $P \cdot \mathrm{d}S$ résulte des orientations opposées de la normale $\vec{n}$ et de l'action de la pression.

Si le système est à l'équilibre, le fluide considéré n'est pas en mouvement ($\vec{V} = \vec{0}$ et nous parlons d'*hydrostatique*. L'équilibre d'un fluide ne peut être atteint que s'il n'y a pas de composante tangentielle ($\vec{F}_\tau = \vec{0}$) : en effet, s'il n'y a pas de mouvement, il ne peut y avoir de frottement. Dans ce cas, les forces de surfaces se résument à

$$\mathrm{d}\vec{F} = -P\,\mathrm{d}S \cdot \vec{n}\,,$$

c'est-à-dire que les forces de surface sont toujours perpendiculaires à la surface. En d'autres termes, les forces de surfaces se résument à des forces de pression.

Si le fluide est en mouvement, nous parlons de hydrodynamique. Si la vitesse est faible ou qu'il y a peu de frottements, la composante tangentielles des forces de surfaces peut être négligée ($\mathrm{d}\vec{F}_\tau \approx \vec{0}$) et nous parlons de *fluide parfait*. Si la vitesse est importante, ou que les frottements soient suffisamment importants pour ne plus pouvoir être négligés ($\mathrm{d}\vec{F}_\tau \neq \vec{0}$), nous parlons de *fluides réels*.

Chapitre 2

Hydrostatique

Archimède (-287;-212) fut probablement le premier à étudier des problèmes où les fluides étaient à l'équilibre. Le principe fondamental de l'hydrostatique — définissant les conditions d'équilibre d'une masse de fluide — fut énoncée par Alexis-Claude Clairaut (1713-1765) alors qu'il travaillait sur la figure de la terre [1]

> Afin qu'une masse de fluide puisse être en équilibre, il faut que les efforts de toutes les parties du fluides renfermées dans un canal quelconque rentrant en lui-même se détruisent mutuellement.

Comme pour tout système à l'équilibre, le principe fondamental de la dynamique appliqué à une masse de fluide se réduit à

$$\sum \vec{F}_{\text{appliquées}} = \vec{0}$$

puisque l'accélération résultante $\vec{A}$ est nécessairement nulle. Il en résulte que

$$\vec{F}_{\mathcal{S}} + \vec{F}_{\mathcal{V}} = \vec{0}\,.$$

De plus, puisque $\mathrm{d}\vec{F}_\tau$ est nécessairement égale au vecteur nul en l'absence de tout mouvement, il reste finalement

$$\vec{F}_n + \vec{F}_{\mathcal{V}} = \vec{0}$$

où $\vec{F}_n$ désigne ici les forces de surface normale à la surface $\mathcal{S}$, c'est-à-dire les forces de pression. Lorsque les forces de volume se réduisent à des forces de pression, cette condition d'équilibre se traduit par le fait que les forces de pression s'équilibrent avec la force de pesanteur.

2.1 Principe fondamental de l'hydrostatique

Soit une masse m de fluide délimitée par une surface fictive cylindrique $\mathcal{S}$ orientée selon l'axe Oz entre les altitudes z_A et z_B (Fig. 2.1). Les forces de volume se réduisent ici à l'action de la pesanteur, soit

$$\vec{F}_{\text{volume}} = \int_{\mathcal{V}} \rho \vec{g}\,\mathrm{d}v$$

et les forces de surface à

$$\vec{F}_{\text{surface}} = \int_{\mathcal{S}} P \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}s\,.$$

Fig. 2.1: Volume $\mathcal{V}$ de fluide délimité par une surface $\mathcal{S}$.

Puisque la somme des forces appliquées est nulle, nous avons donc

$$\int_{\mathcal{V}} \rho\vec{g}\,\mathrm{d}v + \int_{\mathcal{S}} P\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}s = \vec{0}\,.$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{\int_{\mathcal{V}} \rho\vec{g}\,\mathrm{d}v}_{\propto\hat{z}} + \underbrace{\int_{\mathcal{S}_A} P\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}s}_{\propto\hat{z}} + \underbrace{\int_{\mathcal{S}_c} P\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}s}_{\propto\hat{z}_\perp} + \underbrace{\int_{\mathcal{S}_B} P\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}s}_{\propto\hat{z}} = \vec{0}\,.$$

La troisième intégrale sur la surface $\mathcal{S}_c$ doit être nulle car c'est la seule composante perpendiculaire à l'axe Oz, condition nécessaire pour que le fluide soit statique. Pour assurer

$$\int_{\mathcal{S}_c} P\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}s = \vec{0}\,,$$

il est nécessaire que le terme $P\cdot\vec{n}$ soit axi-symétrique, quel que soit le contour $\mathcal{C}$ choisi (nous pourrions raisonner de manière très générale sur une surface $\mathcal{S}$ quelconque). La seule hypothèse générale valide pour type de contour se réduit au fait que la pression ne doit dépendre que de l'altitude z, soit $P = P(z)$. L'intégrale sur $\mathcal{S}_c$ peut alors se réécrire sous la forme

$$\int_{\mathcal{S}_c} P\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}s = \int_{z_B}^{z_A} P(z) \underbrace{\oint_{\mathcal{C}} \vec{n}\,\mathrm{d}l}_{=\vec{0}\,\forall\mathcal{C}} \;\mathrm{d}z$$

qui est nulle quelque soit le contour $\mathcal{C}$. Il reste alors

$$\int_{\mathcal{S}_c} P\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}s = \int_{\mathcal{S}_A} P\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}s + \int_{\mathcal{S}_B} P\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}s\,.$$

Puisque la pression ne dépend que de l'altitude z,

$$\int_{\mathcal{S}_c} P\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}s = -P(z_A)\cdot S_A\cdot\hat{z} + P(z_B)\cdot S_B\cdot\hat{z}\,.$$

En posant $P_A = P(z_A)$, $P_B = P(z_B)$ et $S = S_A = S_B$, il reste

$$P_B - P_A = \rho g\,(z_A - z_B)\;. \tag{2.1}$$

N'interviennent dans ce raisonnement que les deux interfaces A et B, les autres parties de la surface fermée n'interviennent pas car la pression est constante sur chaque tranche horizontale de fluide : les contributions se compensent deux-à-deux et ne contribuent donc que les éléments de surface ayant une projection horizontale non nulle (Fig. 2.1b).

La relation (2.1) peut être réécrite sous la forme

$$P_A + \rho g z_A = P_B + \rho g z_B\,,$$

c'est-à-dire que

$$\boxed{P + \rho g z = \text{constante}}$$

sur l'ensemble du volume $\mathcal{V}$. C'est le principe fondamental de l'hydrostatique.

1. A.-C. Clairaut, *Théorie de la figure de la Terre tirée des principes de l'hydrodynamique*, Durand (Paris), 1743.

Corollaire 1. *Toute section horizontale d'un fluide à l'équilibre est* ISOBARE *(d'égale pression).*

C'est une hypothèse que nous avons dû faire pour s'assurer de la condition d'équilibre. Cela se retrouve facilement à partir de la relation $P+\rho gz =$ constante. Soient deux points A et B d'un même fluide situés dans une section horizontale d'un même fluide, c'est-à-dire que $z_A = z_B = z$. Puisque

$$P + \rho gz = \text{ constante},$$

il vient que

$$P_A + \rho gz = P_B + \rho gz \quad \Leftrightarrow \quad P_A = P_B\,.$$

Corollaire 2. *La surface libre d'un liquide est une surface* ISOBARE.

Si la surface libre est à l'air libre, la pression de la surface libre est égale à la pression atmosphérique P_a.

Corollaire 3. : *Toute variation de pression en un point d'un fluide incompressible se transmet intégralement dans toutes les directions et à la vitesse du son dans ce fluide.*

Une onde acoustique se résume à une onde de pression : en conséquence, une variation de pression se propage à la vitesse du son dans le milieu considéré.

La quantité $P + \rho gz$ a pour unité

$$\begin{aligned}[\rho gz] &= \text{kg.m}^{-3}\text{.m.s}^{-2}\text{.m} \\ &= \underbrace{\text{kg.m}^{+2}\text{.s}^{-2}}_{\text{énergie potentielle}}\text{.m}^{-3}\end{aligned}$$

puisque l'unité de l'énergie potentielle est

$$[mgz] = \text{kg.m}^{+2}\text{.s}^{-2}\,.$$

Le terme ρgz est donc un terme de *densité d'énergie*, c'est-à-dire un terme d'énergie par unité de volume.

Cas d'un fluide stratifié. Considérons maintenant le cas d'une couche stratifiée de deux fluides non miscibles de masses volumiques respectives ρ_1 et ρ_2 telles que $\rho_2 > \rho_1$, et séparés par une interface I (FIG. 2.2). Au sein du fluide 1, nous appliquons le principe fondamental de l'hydrostatique, soit

$$P_1 + \rho_1 gz_1 = P_I + \rho_1 gz_I \tag{2.2}$$

où z_1 désigne l'altitude d'un point quelconque du fluide 1 et z_I l'altitude d'un point du fluide 1 au niveau de l'interface I. Au sein du fluide 2, nous avons par ailleurs

$$P_2 + \rho_2 gz_2 = P_I + \rho_2 gz_I \tag{2.3}$$

où z_2 désigne l'altitude d'un point quelconque du fluide 2 et z_I l'altitude d'un point du fluide 2 au niveau de l'interface I. Il importe de remarquer qu'au niveau de l'interface

$$P_I + \rho_1 gz_I \neq P_I + \rho_2 gz_I$$

puisque $\rho_1 \neq \rho_2$. Le premier enseignement de ce résultat est que la quantité $P + \rho gz$ n'est constante qu'au sein d'un même fluide.

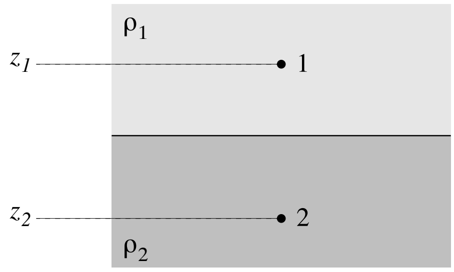


Fig. 2.2: Couche de fluide stratifiée : une interface I sépare les deux fluides non miscibles de masses volumiques respectives ρ_1 et ρ_2.

Quelle équation de continuité devrions-nous écrire à l'interface ? En fait, puisque $\rho_2 > \rho_1$, il manque au terme d'énergie volumique obtenu dans le fluide 1 le produit $(\rho_2 - \rho_1)gz_I$ pour garantir l'égalité des énergies volumiques au niveau de l'interface. En fait, nous devrions écrire pour tout point d'altitude $z_1 \geq z_I$ au sein du fluide 1,

$$P_1 + \rho_1 g z_1 + (\rho_2 - \rho_1) g z_I = \mathrm{K}$$

où K est une constante. Nous pouvons réécrire l'équation précédente sous la forme

$$P_1 + \rho_1 g z_1 = \mathrm{K} - (\rho_2 - \rho_1) g z_I = \mathrm{K}'\,.$$

Cela veut dire que l'énergie volumique $P + \rho g z$ est constante au sein d'un même fluide à l'équilibre, mais que cette quantité est relative (à la constante $(\rho_2 - \rho_1)gz_I$ près).

Les relations (2.2) et (2.3) peuvent être respectivement réécrites sous la forme

$$P_1 + \rho_1 g (z_1 - z_I) = P_I$$

et

$$P_2 + \rho_2 g (z_2 - z_I) = P_I\,.$$

En égalant les membres de gauche, nous avons finalement

$$P_1 + \rho_1 g (z_1 - z_I) = P_2 + \rho_2 g (z_2 - z_I)\,.$$

De là, nous pouvons écrire

$$\rho_1 g \underbrace{(z_1 - z_I)}_{>0} + \rho_2 g \underbrace{(z_2 - z_I)}_{>0} = P_2 - P_1\,,$$

c'est-à-dire que $P_2 > P_1$, ce qui était attendu.

Application au tube en U Soient deux volumes de gaz aux pressions respectives P_1 et P_2 ($P_1 > P_2$) contenus par deux flacons, chacun relié à l'extrémité d'un tube en U (Fig. 2.3a). Le tube en U contient un liquide de masse volumique ρ dont les surfaces libres sont respectivement aux altitudes z_1 (côté flacon 1) et z_2 (côté flacon 2), telle que $z_2 - z_1 = h$. Nous écrivons alors le principe fondamental de l'hydrostatique entre deux points placés respectivement à la surface libre 1 et à la surface libre 2 :

$$P_1 + \rho g z_1 = P_2 + \rho g z_2\,.$$

Ceci peut être réécrit sous la forme

$$P_1 = P_2 + \rho g \underbrace{(z_2 - z_1)}_{h},$$

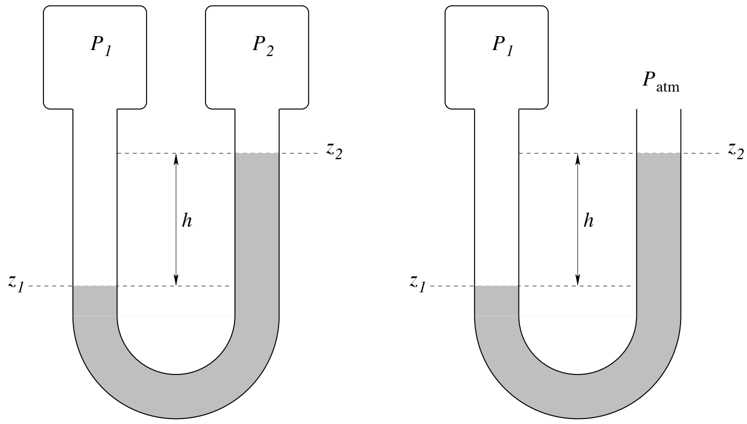
soit

$$P_1 + 0 = P_2 + \rho g h\,.$$

Cette dernière formulation revient à écrire le principe fondamental de l'hydrostatique par rapport à une section horizontale de référence, ici prise au niveau de la surface libre la plus basse (en z_1), choix qui sera généralement suivi dans les exemples traités dans ce livre. De cette dernière relation, il est possible d'écrire

$$h = \frac{1}{\rho g}\left(P_1 - P_2\right)\,. \tag{2.4}$$

La hauteur h permet donc la mesure d'une différence de pression.



(a) Montage à deux flacons (b) Montage à un flacon

Fig. 2.3: Tube en U dont les extrémités sont reliées chacune à un flacon contenant un gaz quelconque respectivement à la pression P_1 et P_2.

Si l'une des branches du tube en U est laissée à l'air libre (Fig. 2.3b), le tube en U peut être utilisé pour déterminer la pression relative P_1 au sein du flacon, puisque la relation (2.4) devient

$$h = \frac{1}{\rho g}\left(P_1 - P_{\text{atm}}\right)$$

où P_{atm} est la pression atmosphérique.

Le plus souvent le liquide utilisé est le mercure en raison de sa grande masse volumique $\rho_{\text{Hg}} = 13\ 600$ kg.m^{-3} : cela permet d'avoir des hauteurs de liquide raisonnable — de l'ordre du mètre — pour des différences de pression de l'ordre du bar. Par exemple, les mesures de pressions sanguines sont exprimées en cm ou en mm de mercure. Il s'agit de pressions relatives (surpressions) à la pression atmosphérique. Par exemple, une pression de 12 cmHg correspond à

$$P - P_{\text{atm}} = \rho_{\text{Hg}} g h = 13\ 600 \times 9,81 \times 0,12 = 16\ 000 \text{ Pa} = 0,16 \text{ bar}\,.$$

La plupart des manomètres permet la mesure de pressions relatives.

L'unité de pression du système international est le Pascal (Pa) en l'honneur de Blaise Pascal (1623-1662) qui a montré que la pression variait avec l'altitude [2].

2. B. Pascal, *Traité de la pesanteur de l'air*, 1663.