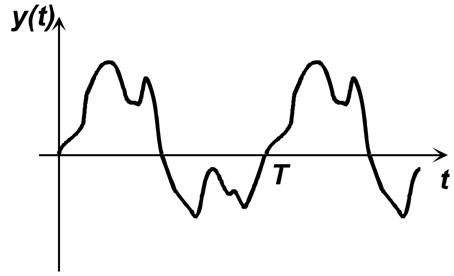
Chapitre I. Grandeurs électriques

1. Représentation des grandeurs électriques

1.1. Grandeurs périodiques

Une grandeur périodique ***y(t)*** est une grandeur qui se retrouve identique à elle-même au bout d'un temps ***T*** comme sur la figure ci-contre.



y(t) peut être un courant, une tension ou n'importe quelle grandeur périodique.

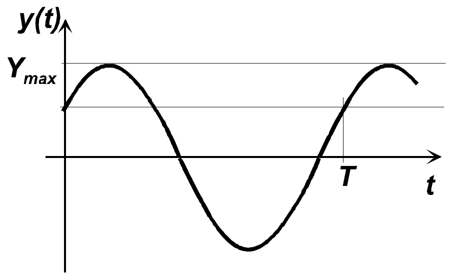
Cette fonction est caractérisée par les grandeurs ci-contre :

- ***T*** période en secondes, s
- ***f*** fréquence ***f=1/T*** en hertz, Hz
- Y_{moy} valeur moyenne $Y_{moy} = \frac{1}{T}\int_0^T y(t).dt$
- Y_{eff} valeur efficace $Y_{eff}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T y^2(t).dt$

1.2. Grandeurs périodiques sinusoïdales

Une grandeur périodique sinusoïdale est définie par la fonction :

$$y(t) = Y_{\max}.\sin(\omega t + \varphi)$$

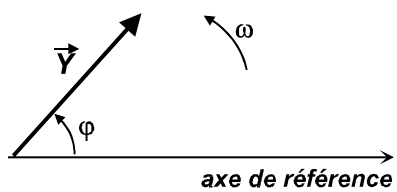


Les grandeurs caractéristiques d'un signal sinusoïdal sont les suivantes :

- ***T*** période en secondes, s
- ω pulsation en radians par seconde, rad/s
- ***f*** fréquence ***f=1/T*** en hertz, Hz
- Y_{max} valeur maximum (amplitude)
- φ déphasage par rapport à l'origine
- $Y_{moy}=0$ valeur moyenne
- $Y_{eff} = Y = \frac{Y_{\max}}{\sqrt{2}}$ valeur efficace

1.3. Représentation de Fresnel d'une grandeur sinusoïdale

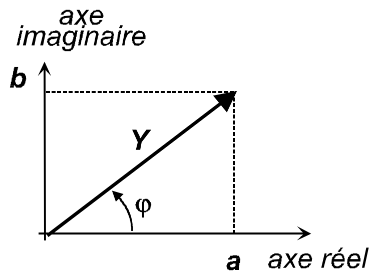
Cette représentation permet, à l'aide d'une construction géométrique simple, d'effectuer la somme de plusieurs fonctions sinusoïdales de même pulsation.



A la grandeur sinusoïdale $y(t) = Y_{\max}.\sin(\omega.t + \varphi)$ on associe le vecteur de Fresnel $\vec{Y} = [Y;\varphi]$ dans le plan de Fresnel correspondant à la pulsation ω. La longueur de vecteur représente la valeur efficace du signal.

1.4. Représentation complexe d'une grandeur sinusoïdale

Le vecteur de Fresnel ci-dessus, $\vec{Y} = [Y;\varphi]$, associé à la grandeur ***y(t),*** peut être représenté par le **nombre complexe** associé :



$\underline{Y} = Y.e^{j\varphi} = Y(\cos\varphi + j.\sin\varphi) = a + j.b$

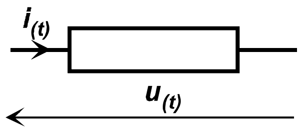
(opérateur ***j*** défini par $j^2 = -1$)

2. Etude d'un dipôle linéaire en régime sinusoïdal

2.1. Cas général

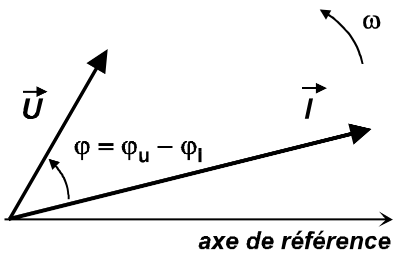
Un circuit est dit linéaire si son fonctionnement est régi par un système d'équations différentielles linéaires (au sens mathématique) à coefficients constants.

Un dipôle linéaire soumis à une tension ***u(t)*** sinusoïdale est parcouru par un courant ***i(t)*** sinusoïdal de même fréquence.



On peut associer à la tension ***u(t)*** le vecteur de Fresnel associé $\vec{U}$ et la tension complexe associée $\underline{U}$

$u(t) = U_{\max}\sin(\omega t + \varphi_u) = U\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi_u)$



Valeur complexe $\underline{U} = Ue^{j\varphi_u}$

On peut de même associer à l'intensité ***i(t)*** du courant traversant le dipôle le vecteur de Fresnel $\vec{I}$ et l'intensité complexe associée $\underline{I}$.

$i(t) = I_{\max}\sin(\omega t + \varphi_i) = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi_i)$

Valeur complexe $\underline{I} = Ie^{j\varphi_i}$

Dans le cas d'un dipôle passif, on définit l'impédance complexe du dipôle :

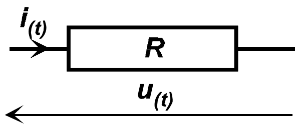
$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = Z.e^{j\varphi}$$

$\underline{U}$ et $\underline{I}$ étant les nombres complexes associés respectivement à ***u(t)*** et ***i(t)***

$Z = \frac{U}{I}$ est le rapport des valeurs efficaces de la tension aux bornes du dipôle et de l'intensité du courant dans le dipôle.

$\varphi = Arg\underline{Z} = \varphi_u - \varphi_i$ est le **déphasage** de ***u(t)*** par rapport à ***i(t).***

- **Résistance pure R**



u(t) = R i(t) ***U=R.I*** et $\varphi = 0$

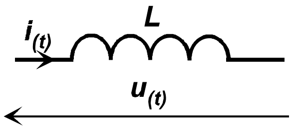
soit : $\underline{Z} = R$

La résistance d'un conducteur cylindrique long, comme par exemple un fil électrique est donné par :

$$R = \frac{\rho.\ell}{s}$$

- ***R*** résistance en ohms, Ω
- ρ résistivité en ohms-mètres, Ω m
- ***s*** section du conducteur en mètres carrés, m²
- ℓ longueur du conducteur en mètres, m

- **Inductance pure L**

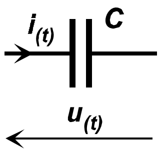


$u(t) = L\frac{di(t)}{dt}$ $U = L\omega.I$ et $\varphi = \frac{\pi}{2}$

soit $\underline{Z}_L = \left[L\omega; \frac{\pi}{2}\right] = jL\omega$

- ***L*** inductance en henry, H
- ω pulsation en radians par seconde, rad/s

- **Condensateur pur C**



$q(t) = Cu(t)$ et $i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C\frac{du(t)}{dt}$

$U = \left(\frac{1}{C\omega}\right)I$ et $\varphi = -\frac{\pi}{2}$

Soit : $\underline{Z} = \left[\frac{1}{C\omega}; -\frac{\pi}{2}\right] = -\frac{j}{C\omega} = \frac{1}{jC\omega}$

- ***C*** capacité en farads, F
- ω pulsation en radians par seconde, rad/s

2.2. Impédance d'un dipôle passif linéaire

$\underline{Z} = R + jX = Z.e^{j\varphi}$ ***R*** est la résistance du dipôle, ***X*** sa réactance

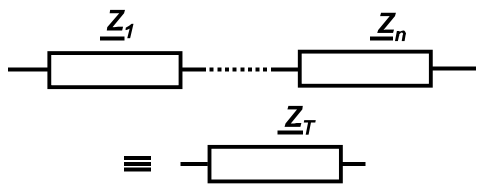
Dans le cas où ***X>0***, le dipôle est inductif et $X = L\omega$

Dans le cas où ***X<0***, le dipôle est capacitif et $X = -1/C\omega$

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} \qquad \text{et} \qquad \tan\varphi = \frac{X}{R}$$

2.3. Association de dipôles élémentaires

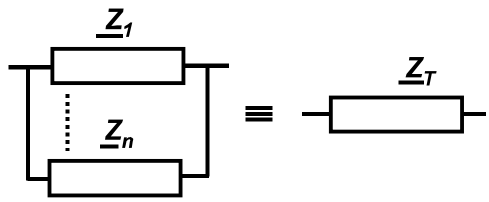
On peut associer des dipôles $\underline{Z}_1$ à $\underline{Z}_n$ en série.



On applique alors la loi des mailles et on obtient la valeur de l'impédance du dipôle équivalent à l'ensemble :

$$\underline{Z}_T = \sum_i \underline{Z}_i$$

On peut associer des dipôles $\underline{Z}_1$ à $\underline{Z}_n$ en parallèle. On applique alors la loi des nœuds et on obtient la valeur de l'admittance du dipôle équivalent à l'ensemble :



$$\underline{Y}_T = \sum_i \underline{Y}_i \quad \text{avec} \quad \underline{Y}_i = \frac{1}{\underline{Z}_i}$$

$\underline{Y}_i$ est l'admittance d'un dipôle élémentaire.

3. Puissances et énergies

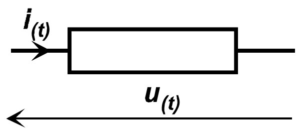
3.1. Puissance consommée par un dipôle

Soit un dipôle soumis à ***u(t)*** et parcouru par ***i(t)***. On utilise la convention récepteur.
On peut définir la puissance instantanée consommée par ce dipôle $p = u(t).i(t)$

Dans le cas d'un fonctionnement périodique de période T on définit la **puissance moyenne** reçue par ce dipôle sur une période :

$$\boxed{P_{moy} = \frac{1}{T}\int_0^T u(t).i(t).dt}$$

- ***P*** en watts, W
- ***u(t)*** en volts, V
- ***i(t)*** en ampères, A



On définit la **puissance apparente** consommée par le dipôle :

$$S = UI$$

- ***S*** en volts-ampères, VA
- ***U*** valeur efficace de ***u(t)*** en volts, V
- ***I*** valeur efficace de ***i(t)*** en ampères, A

On en déduit le **facteur de puissance** du dipôle $k = \dfrac{P}{S}$ (sans unité)

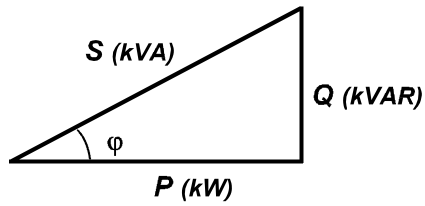
3.2. Dipôle en régime sinusoïdal

- **Puissance instantanée** $p = u(t).i(t)$
- **Puissance moyenne ou puissance active** $P = \frac{1}{T}\int_0^T u(t).i(t).dt = UI\cos\varphi$
- **Puissance** réactive $Q = UI\sin\varphi$
- **Puissance apparente** $S = \sqrt{P^2 + Q^2} = UI$
- **Facteur de puissance** $k = \frac{P}{S} = \cos\varphi$

- Q en volts-ampères-réactifs, VAR
- S en volts-ampères, VA

Il est possible de définir la puissance apparente complexe : $\underline{S} = P + jQ = UI.e^{j\varphi}$

Le triangle des puissances ci-contre est un bon moyen mnémotechnique pour mémoriser le rapport entre S, P, Q et φ.



3.3. Théorème de Boucherot

La puissance active consommée par l'ensemble de n dipôles d'un réseau est égale à la somme des puissances actives consommées par chacun des dipôles.
La puissance réactive consommée par l'ensemble de n dipôles d'un réseau est égale à la somme des puissances réactives consommées par chacun des dipôles :

$$P = \sum_i P_i \qquad Q = \sum_i Q_i$$

Ce théorème est très utilisé pour faire des bilans de puissance dans les installations. Attention à ne pas additionner les puissances apparentes. Cette addition n'est possible que dans certains cas particuliers.

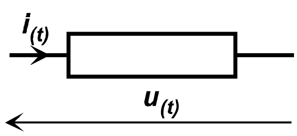
3.4. Energies

- **Définition**

Un dipôle soumis à une tension $u(t)$ et parcouru par un courant d'intensité $i(t)$ consomme entre les instants t_1 et t_2 une énergie W_{12}.

$$W_{12} = \int_{t_1}^{t_2} u(t).i(t).dt$$

- W_{12} en joules, J
- $u(t)$ en volts, V
- $i(t)$ en ampères, A



Dans le cas d'un fonctionnement périodique T pour lequel on a défini la puissance active P consommée par le dipôle, on écrit :

$$W_{12} = P.(t_2 - t_1) = P.\Delta t$$

- W_{12} en joules, J
- P en watts, W
- $t_2 - t_1 = \Delta t = T$ en secondes, s

- **Unités usuelles**

Dans le système international d'unités l'énergie s'exprime en joules. Toutefois un joule correspondant à une énergie très faible, on lui préfère dans la pratique d'autres unités.

Le **watt-heure**, ***Wh***, est l'énergie consommée en une heure par un récepteur consommant une puissance active de un watt.

$$1kWh = 1000Wh = 3{,}6.10^6 J = 3{,}6MJ$$

La tonne équivalent pétrole, ***tep***, est l'énergie calorifique que peut fournir une tonne de pétrole.

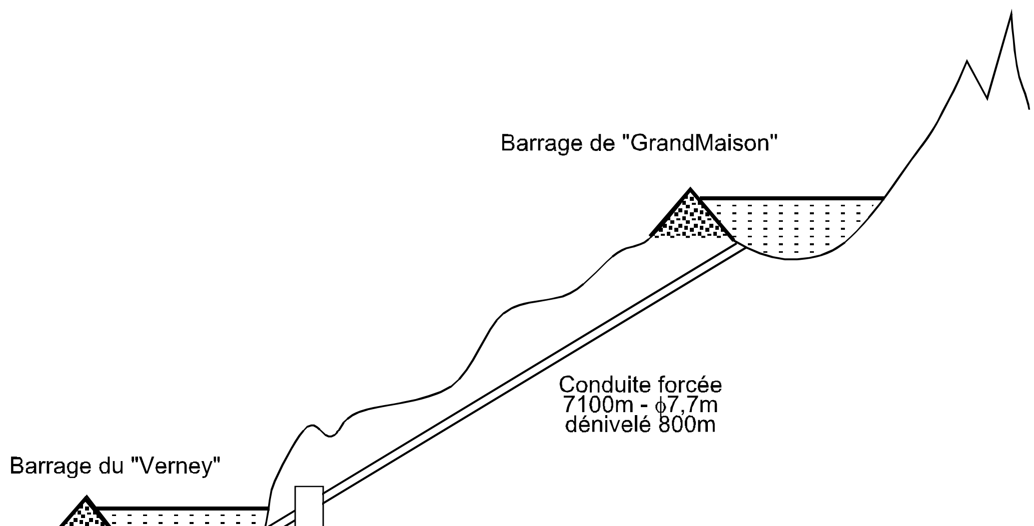
$$1tep = 41{,}868.10^9 J = 11630\,kWh$$

1tep représente l'énergie que peuvent fournir 1000m^3 de gaz ou 7,33 barils de pétrole (équivalence conventionnelle du point de vue énergétique).

- **Exemple de conversion d'énergie : barrage de Grand Maison dans l'Isère**

Un barrage hydro-électrique stocke l'énergie sous forme d'énergie potentielle (une masse d'eau est stockée en altitude).
Lorsque l'eau est turbinée, son énergie potentielle se transforme en énergie cinétique, laquelle se transforme à son tour en énergie électrique.

Une masse M d'eau, à une altitude h, possède une énergie potentielle $W = M.g.h$ qui peut être convertie en énergie électrique.



Volume d'eau stockée 137 millions de m^3
Hauteur de chute 800m en moyenne

On en déduit la quantité d'énergie stockée :

$$W_{stockée} = M.g.h = \left(137.10^6.10^3\right)x9{,}81x800 = 1075.10^{12}\,J = 300.10^6\ kWh$$

$$W_{stockée} = 300\ GWh$$

On peut également calculer la puissance fournie au turbinage en négligeant les pertes de charge dans la conduite.

$$P = Q.g.h.\eta$$

- P puissance en watts, W
- Q débit massique en kilogrammes par seconde, kg/s
- h hauteur en mètres, m
- g accélération de la pesanteur en m/s^2
- η rendement du turbinage

Le débit à Grand Maison peut atteindre 217 m^3/s.
On admet un rendement de 80 %.
On en déduit : $P = Q.g.h.\eta = \left(217.10^3\right)x9{,}81x800x0{,}8 = 1{,}36.10^9\ W = 1{,}36\ GW$

3.5. Bilan énergétique pour des dipôles élémentaires

Résistance – Loi de Joule

Une résistance R, parcourue par un courant $i(t)$ pendant une durée Δt, dissipe sous forme de chaleur une énergie

$$W = \int_0^{\Delta t} R.i(t)^2.dt = R.I^2\Delta t$$

- W en joules, J
- R en ohms, Ω
- I valeur efficace en ampères, A

Inductance – Energie stockée

Une inductance L, parcourue par un courant I, emmagasine une énergie

$$W = \int_0^{I} L.i.di = \frac{1}{2}L.I^2$$

- W en joules, J
- L en henry, H
- I en ampères, A

Condensateur – Energie stockée

Un condensateur C, soumis à une tension V, emmagasine une énergie

$$W = \int_0^{V} C.v.dv = \frac{1}{2}C.V^2$$

- W en joules, J
- C en farads, F
- V en volts, V

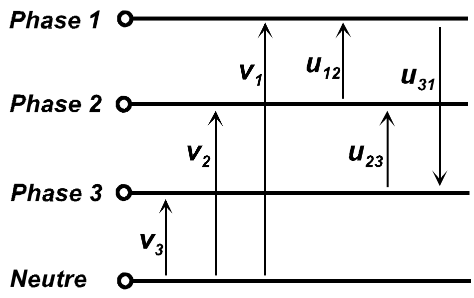
4. Systèmes triphasés

Le réseau de distribution terminal est composé de 4 fils : les 3 phases et le neutre.
Les tensions entre neutre et une des phases sont appelées « tensions simples », les tensions entre deux phases « tensions composées ».

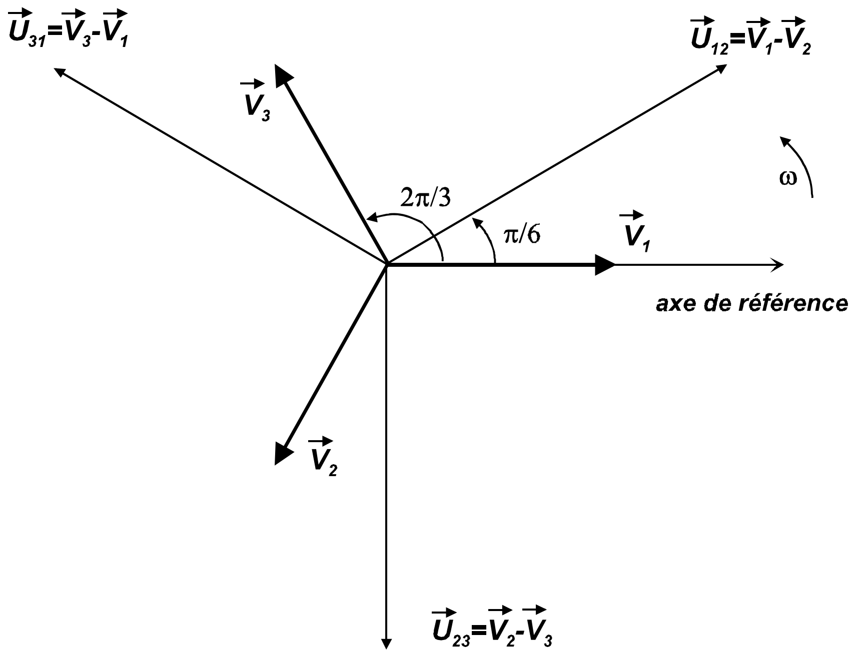
v_1 , v_2 , v_3 tensions simples
u_{12} , u_{23} , u_{31} tensions composées

Réseau usuel :
Tensions simples **V = 230 V**
Tensions composées **U = 400 V**

$u_{12} = v_1 - v_2$
$u_{23} = v_2 - v_3$
$u_{31} = v_3 - v_1$



Les 6 tensions peuvent être représentées par des vecteurs de Fresnel.



En valeur instantanée, les tensions s'écrivent :

$$v_1 = V\sqrt{2}\sin\omega t$$
$$v_2 = V\sqrt{2}\sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)$$
$$v_3 = V\sqrt{2}\sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)$$

$$u_{12} = V\sqrt{2}\sqrt{3}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)$$
$$u_{23} = V\sqrt{2}\sqrt{3}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3}\right)$$
$$u_{31} = V\sqrt{2}\sqrt{3}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6} - \frac{4\pi}{3}\right)$$