Chapitre 1
Algèbre linéaire

Les espaces vectoriels ont été introduits par **Cayley** et **Grassmann** au milieu du XIX^e siècle. Cependant, le premier ne proposait qu'un calcul sur des n-uplets et la formalisation du second était des plus obscures. Ce fut l'œuvre de Giuseppe **Peano** de déchiffrer le travail du mathématicien allemand et de donner le premier, en 1888, une définition satisfaisante d'un espace vectoriel. Il introduisit les applications linéaires et montra que cette théorie ne se réduit pas à la dimension finie en citant l'exemple des polynômes. Giuseppe Peano est aussi connu pour son axiomatique des entiers naturels et pour avoir construit une courbe remplissant un carré. On lui doit d'astucieux contre-exemples qui ont remis en cause des assertions qui semblaient pourtant bien établies.

Giuseppe Peano
1858-1932

Objectifs

Les incontournables

▷ Montrer qu'une famille est libre, génératrice dans un espace vectoriel de dimension quelconque

▷ Justifier qu'une application est linéaire

▷ Reconnaître un hyperplan

▷ Approfondir les notions de somme et de somme directe de sous-espaces vectoriels, ainsi que de sous-espaces vectoriels supplémentaires, et donc de projecteur

▷ Déterminer le rang d'une famille de vecteurs ou d'une application linéaire

▷ Utiliser le théorème du rang.

Et plus si affinités...

▷ Établir que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires dans un espace vectoriel de dimension finie ou non

▷ Calculer la trace d'un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

Résumé de cours

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Familles génératrices, familles libres, bases

Soit I un ensemble quelconque.

Combinaisons linéaires

Définition : *Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E. On appelle **combinaison linéaire** de la famille $(x_i)_{i\in I}$ toute somme $\sum\limits_{i\in I} \lambda_i x_i$ dans laquelle $(\lambda_i)_{i\in I}$ est une famille de scalaires appelés **coefficients**, tous nuls sauf éventuellement un nombre fini.*

Commentaire : L'ensemble des combinaisons linéaires de la famille $(x_i)_{i\in I}$ est un sous-espace vectoriel de E, noté $\mathrm{Vect}(x_i)_{i\in I}$. On l'appelle le ***sous-espace vectoriel engendré par la famille*** $(x_i)_{i\in I}$.

Familles libres, familles génératrices

Définition : *Une famille $(x_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E est **libre** si la seule combinaison linéaire nulle de cette famille est la combinaison linéaire dont tous les coefficients sont nuls.*

Commentaires : La famille $(x_i)_{i\in I}$ est libre si toute combinaison linéaire $\sum\limits_{i\in I} \lambda_i x_i = 0$ vérifie $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in I$.

▹ La famille $(x_i)_{i\in I}$ est dite ***liée*** lorsqu'elle n'est pas libre. Dans ce cas, il existe une partie finie J de I, et une famille de scalaires $(\lambda_j)_{j\in J}$ non tous nuls tels que

$$\sum_{j\in J} \lambda_j x_j = 0.$$

Proposition 1.1 — Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de E. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $(x_i)_{i\in I}$ est une famille libre;

(ii) pour toute partie finie J de I, la famille $(x_j)_{j\in J}$ est libre.

Commentaire : Si J est une partie de I, la famille $(x_j)_{j\in J}$ est une sous-famille de la famille $(x_i)_{i\in I}$. La proposition précédente se résume de la manière suivante : une famille est libre si et seulement si toutes ses sous-familles finies sont libres.

Exemple : Toute famille de polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$ de degrés échelonnés est libre.

Définition : *La famille $(x_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E est une famille **génératrice** de E si tout vecteur de E peut s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs x_i.*

Commentaire : Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $(x_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice de E;

(ii) $\mathrm{Vect}(x_i)_{i\in I} = E$;

(iii) pour tout vecteur x de E, il existe une famille de scalaires $(\lambda_i)_{i\in I}$ tous nuls sauf un nombre fini telle que :

$$x = \sum_{i\in I} \lambda_i x_i.$$

◆ Base

Définition : *Une famille libre et génératrice de E est appelée une **base** de E.*

Proposition 1.2 — Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E ;

(ii) tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs e_i.

Commentaire : Soit $(e_i)_{i\in I}$ une base de E. Pour tout vecteur x de E, il existe une unique famille de scalaires $(\lambda_i)_{i\in I}$ tous nuls sauf un nombre fini telle que :

$$x = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i.$$

Pour tout i, le scalaire λ_i s'appelle ***la*** i***ième coordonnée*** ou ***composante*** de x dans la base $(e_i)_{i\in I}$.

Exemples : $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$ appelée ***base canonique*** de $\mathbb{K}[X]$.
▷ La famille $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$, où $e_i = (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$ (le 1 se trouvant en $i^{\text{ième}}$ position) forme une base de $\mathbb{K}^n$ appelée base canonique de $\mathbb{K}^n$.
▷ Toute famille $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de polynômes vérifiant, pour tout k, $\deg(P_k) = k$, est une base de $\mathbb{K}[X]$.

◆ Cas des espaces vectoriels de dimension finie

On étend à des familles indexées par un ensemble quelconque les propriétés rencontrées en PTSI dans le cadre de famille finie.

Proposition 1.3 — Soit E un espace vectoriel de dimension finie n.

(i) De toute famille génératrice, on peut extraire une base de E.

(ii) Toute famille libre de E est finie et a au plus n éléments.

(iii) Toute base de E est finie et contient n éléments.

■ Somme, somme directe de sous-espaces vectoriels

Définition : *Une partie F de E est un **sous-espace vectoriel** de E si les propriétés suivantes sont vérifiées :*

(i) $0_E \in F$;

(ii) $x, y \in F \Longrightarrow x + y \in F$;

(iii) $x \in F$ *et* $\lambda \in \mathbb{R} \Longrightarrow \lambda x \in F$.

Commentaire : L'ensemble F, avec les lois induites par celles de E, est un espace vectoriel. Ceci justifie la terminologie « sous-espace vectoriel ».

◆ Somme

Soit m un entier non nul et $(F_i)_{i\in[\![1,m]\!]}$ une famille finie de sous-espaces vectoriels de E.

Définition : *On appelle* ***somme des sous-espaces vectoriels*** $(F_i)_{i\in[\![1,m]\!]}$ *le sous-espace vectoriel :*

$$\sum_{i=1}^{m} F_i = \left\{ \sum_{i=1}^{m} f_i \mid (f_i) \in \prod_{i=1}^{m} F_i \right\}.$$

Commentaire : Il s'agit bien d'un sous-espace vectoriel de E car il est non vide, stable par combinaison linéaire. On le note également $F_1 + F_2 + \cdots + F_m$ et il s'agit du plus petit sous-espace vectoriel de E contenant tous les F_i.

◆ Somme directe

Soit m un entier non nul et $(F_i)_{i\in[\![1,m]\!]}$ une famille finie de sous-espaces vectoriels de E ; on note F la somme des F_i :

$$F = F_1 + F_2 + \cdots + F_m.$$

Définition : *On dit que la somme F des F_i est* ***directe*** *si tout vecteur de F se décompose de manière unique en une somme de vecteurs de F_i. On note alors :*

$$F = \bigoplus_{i=1}^{m} F_i = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_m.$$

Proposition 1.4 — Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) la somme F des F_i est directe ;

(ii) les hypothèses $f_1 \in F_1,\ f_2 \in F_2, \ldots, f_m \in F_m$ et $f_1 + f_2 + \cdots + f_m = 0$ impliquent

$$f_1 = f_2 = \cdots = f_m = 0.$$

◆ Décomposition en somme directe

Définition : *On dit que E est* ***somme directe*** *des F_i si la somme des F_i est directe et égale à E, autrement dit si :*

$$E = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_m.$$

Commentaires : Lorsque E est somme directe des F_i, on dit que la famille $(F_i)_{i\in[\![1,m]\!]}$ est une ***décomposition en somme directe de*** E.

▷ Dans le cas où $m = 2$, dire que E est somme directe de F_1 et F_2 est équivalent à dire que F_1 et F_2 sont supplémentaires dans E.

Des résultats précédents, on déduit les caractérisations suivantes.

Proposition 1.5 — Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) E est somme directe des F_i ;

(ii) tout vecteur de E se décompose de manière unique en une somme de vecteurs de F_i ;

(iii) $E = F_1 + F_2 + \cdots + F_m$ et les hypothèses $f_1 \in F_1,\ f_2 \in F_2, \ldots, f_m \in F_m,\ f_1 + f_2 + \ldots + f_m = 0$ impliquent $f_1 = f_2 = \ldots = f_m = 0$.

◆ Base adaptée à une décomposition en somme directe

On suppose que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et que la famille $(F_i)_{i\in[\![1,m]\!]}$ est une décomposition en somme directe de E :

$$E = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_m.$$

> **Proposition 1.6 —** Pour $i \in [\![1, m]\!]$, soit $\mathcal{B}_i$ une base de F_i. La réunion des bases $\mathcal{B}_i$ est une base de E.

Définition : *On appelle* **base adaptée à la décomposition en somme directe** $E = \bigoplus_{i=1}^{m} F_i$ *toute base obtenue comme réunion de bases des* F_i.

◆ Caractérisation des supplémentaires en dimension finie

On rappelle ci-dessous les différentes caractérisations des sous-espaces vectoriels supplémentaires, lorsque E est de dimension **finie.**

> **Théorème 1.7 —** Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. Les propositions suivantes sont équivalentes :
>
> (i) F et G sont supplémentaires dans E ;
>
> (ii) $E = F + G$ et $\dim E = \dim F + \dim G$;
>
> (iii) $F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim E = \dim F + \dim G$.

■ Hyperplan d'un espace vectoriel de dimension finie

On suppose que E est de dimension $n \geqslant 2$.

Définition : *On appelle* **hyperplan** *de E tout espace admettant une droite comme supplémentaire.*

> **Proposition 1.8 —** Un sous-espace vectoriel de E est un hyperplan de E si et seulement s'il est de dimension $n - 1$.

◆ Équation d'un hyperplan

> **Théorème 1.9 —** Soit F un sous-espace vectoriel de E et $\mathcal{B}$ une base de E. Les propriétés suivantes sont équivalentes :
>
> (i) F est un hyperplan de E ;
>
> (ii) il existe des scalaires $a_1, \ldots, a_n$ non tous nuls tels que pour tout $x \in E$:
>
> $$x \in F \qquad \Longleftrightarrow \qquad a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0 \;;$$
>
> égalité dans laquelle $x_1, \ldots, x_n$ sont les coordonnées de x dans $\mathcal{B}$.

Commentaire : Les hyperplans de $\mathbb{K}^2$ sont les droites vectorielles. Un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^2$ est une droite vectorielle si et seulement s'il admet une équation du type $ax + by = 0$, où $(a, b) \in \mathbb{K}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Théorème 1.10 — Soit $\mathcal{B}$ une base de E et deux familles de scalaires non tous nuls, $(a_1, \ldots, a_n)$ et $(b_1, \ldots, b_n)$, telles que pour tout $x \in E$ de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ dans $\mathcal{B}$:

$$a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad b_1 x_1 + \cdots + b_n x_n = 0.$$

Il existe alors un scalaire λ tel que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \qquad b_i = \lambda a_i.$$

Commentaire : Fixons $\mathcal{B}$ une base de E et soit F un hyperplan de E. D'après le théorème 1.9, il existe une famille non nulle de scalaires $(a_1, \ldots, a_n)$ telle que pour tout $x \in E$ de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ dans $\mathcal{B}$:

$$x \in F \qquad \Longleftrightarrow \qquad a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0.$$

D'après le théorème 1.10, ces scalaires sont définis à une constante multiplicative près. On dit que $a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0$ est une ***équation de l'hyperplan*** F ***dans la base*** $\mathcal{B}$.

◆ Équations d'un sous-espace vectoriel

Théorème 1.11 — Soit $p \in [\![1, n]\!]$. L'intersection de p hyperplans de E est de dimension au moins $n - p$.

Théorème 1.12 — Tout sous-espace vectoriel de E de dimension $n - p$ est l'intersection de p hyperplans.

Commentaire : Toute droite vectorielle de $\mathbb{K}^3$ est intersection de deux plans vectoriels. Elle est définie par un système d'équations du type

$$\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ \alpha x + \beta y + \gamma z = 0 \end{cases}$$

où (a, b, c) et (α, β, γ) sont des éléments de $\mathbb{K}^3$ non proportionnels.

■ Application linéaire, matrice (rappel de PTSI)

On désigne par E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Définition : *Une application $u : E \to F$ est dite **linéaire** si elle vérifie :*

$$\boxed{\forall (x, y) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad u(x + \lambda y) = u(x) + \lambda u(y)}$$

Notation : *On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E vers F.*

Commentaires : $\mathcal{L}(E, F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Lorsque E et F sont de dimension finie, on a : $\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim(E) \times \dim(F)$.

▹ Une application linéaire de E dans E est appelée ***endomorphisme*** de E.

▹ Une application linéaire de E dans F bijective est appelée ***isomorphisme***.

▹ On dit que deux espaces vectoriels E et F sont ***isomorphes*** s'il existe un isomorphisme de E vers F.

▹ Deux espaces vectoriels de dimension finie sont isomorphes si et et seulement s'ils ont la même dimension. En particulier tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

◆ Définition d'une application linéaire par image d'une base

Théorème 1.13 — Soit $(e_i)_{i\in I}$ une base de E et $(f_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs appartenant à un espace vectoriel F.

(i) Il existe une unique application linéaire u de E vers F telle que :

$$\forall i \in I, \qquad u(e_i) = f_i.$$

(ii) Pour que u soit injective, il faut et il suffit que la famille $(f_i)_{i\in I}$ soit libre.

(iii) Pour que u soit surjective, il faut et il suffit que la famille $(f_i)_{i\in I}$ engendre F.

(iv) Pour que u soit bijective, il faut et il suffit que la famille $(f_i)_{i\in I}$ soit une base de F.

Commentaire : Une application linéaire u de E vers F est entièrement déterminée par son action sur une base de E.

▷ Supposons que E et F aient pour dimensions respectives n et p.
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_p)$ une base de F. Une application linéaire u de E vers F est entièrement déterminée par la donnée des vecteurs $u(e_j)$, qui, eux-mêmes, sont déterminés par leurs coordonnées dans la base $\mathcal{C}$.

Définition : *On appelle **matrice de u par rapport aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$** et on note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$, la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ dont la $j^{\text{ième}}$ colonne est formée des coordonnées du vecteur $u(e_j)$ dans la base $\mathcal{C}$.*

Commentaire : Si on note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = (a_{ij})$, on a pour tout $j \in [\![1, n]\!]$: $u(e_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{ij} f_i$.

Notation : *Lorsque $E = F$ et $\mathcal{B} = \mathcal{C}$, on note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ cette même matrice.*

◆ Noyau, image d'une application linéaire

Définition : *Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle **noyau** de u l'ensemble noté $\ker(u)$, défini par*

$$\boxed{\ker(u) = u^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E \mid u(x) = 0_F\}}$$

Proposition 1.14 — Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

(i) Le noyau de u est un sous-espace vectoriel de E.

(ii) L'application u est injective si et seulement si son noyau est réduit à $\{0_E\}$.

Définition : *Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle **image** de u l'ensemble noté $\mathrm{Im}(u)$ défini par :*

$$\boxed{\mathrm{Im}(u) = u(E) = \{u(x) \mid x \in E\} = \{y \in F \mid \exists x \in E,\ y = u(x)\}}$$

Proposition 1.15 — Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. L'image de u est sous-espace vectoriel de F.

◆ Notion de rang

Définition : *Le **rang d'une application linéaire** u de E vers F est la dimension de son image. Il est noté $\mathrm{rg}(u)$.*