PARTIE I

Techniques de base

Avertissement

En mathématiques, on ne comprend pas les choses, on s'y habitue.

John von Neumann

Cette partie Techniques de base n'est pas seulement un *vade mecum*[1] des indispensables ou un catalogue de révisions. C'est davantage une occasion de faire le point — au début de l'année ou avant l'entrée en terminale — sur ce qui est essentiel à connaître dans un premier temps. Le manque d'assurance sur ces notions semble en effet l'écueil principal sur lequel viennent s'échouer des candidats alors qu'ils tentent en plus de s'engager sur des constructions plus élaborées.

Le mode d'emploi n'est donc pas secret. Le lecteur se doit comme préalable d'être concentré, patient et persévérant, chaque point ne pouvant être abordé que si le précédent a été correctement assimilé. Les mathématiques sont ainsi construites par superposition pyramidale de notions. Par ailleurs, la lecture se doit d'être *activement* suivie, « crayon à la main », en noircissant des brouillons, en refaisant les calculs, en réécrivant les définitions, en rédigeant les démonstrations des théorèmes et en s'astreignant à des exercices réguliers. C'est à la force du poignet qui écrit que le lecteur ira chercher des progrès.

Aucune notion, aussi basique soit-elle, n'est passée sous silence au motif qu'elle serait évidente. L'expérience montre en effet que les élèves de lycée, jusqu'à la terminale, ont besoin que ce qui régit leur enseignement soit *écrit*. Beaucoup de ces élèves ont développé, avec raison, le comportement scolaire d'aller trouver du réconfort dans ces références établies. C'est aussi le cas de la plupart des élèves des classes préparatoires. Revoir ces bases régulièrement dans l'année ou dès qu'une difficulté survient constitue une bonne hygiène intellectuelle.

Les exercices proposés dans cette partie font office d'entraînement. De difficultés diverses, répartis tout au long du premier trimestre, ils permettent de s'assurer que les techniques du calcul, du raisonnement et de la rédaction sont acquises. Ils offrent également l'opportunité de réactiver certaines notions et de préciser certains usages si d'aventure un doute survient. En dehors de tout contexte, ils ne sont pas dénués d'intérêt pratique, ne serait-ce que de s'exercer aux calculs et à la rédaction ce qui est l'unique façon de « savoir faire ». Les exercices en apparences les plus éloignés du programme mettent toujours en jeu des raisonnements et des méthodes qui participent à une bonne maîtrise des outils mathématiques de terminale.

(1). Il appartient au lecteur, par tout moyen à sa convenance, de trouver les précisions qui lui feraient momentanément défaut sur le sens de certains mots du texte.

Base

1 Pour (bien) commencer

J'aimais et j'aime encore les mathématiques pour elles-mêmes
comme n'admettant pas l'hypocrisie et le vague, mes deux bêtes d'aversion.

Stendhal

§1 Symboles et conventions

Les symboles mathématiques, pour commodes qu'ils soient, se plient à un usage strict. Il convient d'être très vigilant lorsqu'on les manipule. On ne s'étonnera pas de devoir passer parfois de longs moments à réfléchir avant d'écrire un symbole mathématique. Ces symboles usuels ne sont en aucun cas des abréviations. On ne doit pas les inclure à l'intérieur d'une phrase rédigée. Il convient de distinguer sans les mélanger : les phrases complètes (écrites en français et sans abréviation) et les phrases mathématiques (lignes de calcul ou propositions reliées entre elles par des liens logiques). Dans celles-ci, on fera une distinction claire entre :

— L'égalité : le symbole d'égalité $=$ ne peut se placer qu'entre des objets de même nature, de type analogue. Il indique que deux objets sont rigoureusement identiques c'est-à-dire que *toutes* leurs propriétés sont les mêmes.

— L'équivalence : le symbole d'équivalence $\iff$ ne se place qu'entre deux propositions et permet d'indiquer que les deux propositions — les deux énoncés — ont exactement la même signification (et, en tant que propositions, qu'elles sont simultanément vraies ou simultanément fausses).

Les notations souffrent beaucoup l'à peu près et doivent être utilisées dans le cadre précis où elles ont été définies. Les symboles mathématiques (TOUS !) doivent être calligraphiés parfaitement, et de façon scolaire, tels qu'ils apparaissent dans le cours.

— la flèche $\rightarrow$ signifie « tend vers ». Issue du langage des *limites*, elle apparaîtra, par exemple, sous la forme : $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} l$.

— la flèche $\mapsto$ (avec une barre verticale), est le symbole d'association pour définir une application. $f\colon x \mapsto \dots$ se lit « f est une application qui, à x, associe … »

— les symboles $\Longrightarrow$ et $\Longleftarrow$ sont des flèches d'implications. Leur usage sera scrupuleusement décrit dans cette partie Techniques de base page 14.

— toutes les autres flèches imaginables (⇾ ➪ ⇒▷), pour esthétiques qu'elles soient, risquent de ne pas être comprises dans leur signification initiale.

Les notations et conventions d'écriture rappellent au lecteur la nature des objets manipulés. Toute erreur dans ce domaine (associer à un objet une propriété concernant un objet d'une autre nature) est lourdement préjudiciable.

— En Analyse : f est une fonction alors que $f(x)$ est un réel (c'est l'image du réel x par la fonction f).

— En Géométrie : (AB) avec des parenthèses est une droite, [AB] avec des crochets est un segment, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ avec une flèche est un vecteur, AB sans rien d'autre est une distance (donc un nombre réel positif).

— En Probabilité : P(A) est la probabilité de l'événement A. C'est donc un nombre avec lequel on peut calculer (par exemple $\mathrm{P(A)} \times \mathrm{P(B)} = \ldots$).

Les éléments « en indice » doivent être écrit *en plus petit* et *en dessous* de la ligne d'écriture. Confondre x_{A} (x indice A) et $x\mathrm{A}$ (x fois A ?) est plus qu'une erreur d'écriture : celui qui écrit n'a pas l'air de savoir ce qu'il écrit.

Plus généralement, toutes les notations se *prononcent* : on écrit (AB) et on lit « la droite (AB) ». On doit donc y penser lorsqu'on lit ou lorsqu'on s'exprime. Nommer correctement des objets (dans sa tête) quand on les écrit n'est pas une perte de temps.

Enfin, on n'utilisera le tiret — qu'au sein de phrases écrites en français et non dans des écritures mathématiques. En mathématique, le tiret c'est un signe moins !

§2 Ensembles

Un *ensemble* est une collection d'objets distincts appelés *éléments*. Un ensemble est caractérisé par le fait que pour tout objet que l'on peut considérer, cet objet est ou n'est pas (un) élément de l'ensemble

Un ensemble peut être défini *par extension* c'est-à-dire en énumérant entre accolades la liste de ses éléments, séparés par des points-virgules. La liste peut être dressée exhaustivement ou en utilisant des points de suspension s'il cela n'amène pas d'ambiguïté. Par exemple, on pose $\mathrm{E} = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 \}$ et $\mathrm{I} = \{ 1 ; 3 ; 5 ; 7 ; 9 ; \cdots \}$.

Un ensemble peut aussi être donné *par compréhension* c'est-à-dire en décrivant ses éléments par une propriété qui les caractérise : $\mathrm{I} = \{n \text{ tels que } n = 2k+1 \text{ avec } k \in \mathbb{N}\}$. I est aussi l'ensemble $\mathrm{I} = \{2k + 1,\ k \in \mathbb{N}\}$. On lit : « I est l'ensemble des $2k + 1$, k parcourant $\mathbb{N}$ ». On aura reconnu que I est l'ensemble des entiers naturels impairs.

DÉFINITION **1**. L'ensemble ne contenant aucun élément est l'*ensemble vide*, noté $\varnothing$. Un ensemble ne contenant qu'un seul élément est un *singleton*. Un ensemble contenant deux éléments est une *paire*.

On veillera à distinguer un ensemble de ses éléments. e est un élément et $\{e\}$ est le singleton constitué de l'unique élément e.

Lorsque E est non vide, l'écriture $e \in \mathrm{E}$ (« e *appartient* à E ») indique que l'objet e se trouve dans la liste des éléments qui constituent l'ensemble E. L'écriture $e \notin \mathrm{E}$ (« e n'appartient pas à E »)indique que l'objet e ne se trouve pas dans cette liste.

L'écriture $A \subset B$ (« A *est inclus dans* B ») indique soit que A est l'ensemble vide soit que chaque élément de l'ensemble A appartient à l'ensemble B. On dit aussi : A *est contenu dans* B ; A *est une partie de* B ; A *est un sous-ensemble de* B.

Dire que deux ensembles A et B sont égaux (ce qu'on note $A = B$) revient à dire que la *double inclusion* $A \subset B$ et $B \subset A$ est vérifiée. Les deux ensembles A et B contiennent exactement les mêmes éléments.

Dans un ensemble, il n'y pas d'idée d'ordre : $\{a\,;\,b\} = \{b\,;\,a\}$.

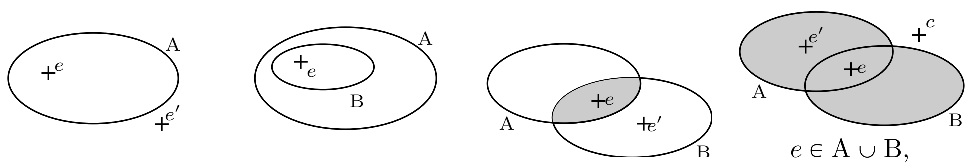
L'écriture $(a\,;\,b)$ désigne un *couple* c'est-à-dire un ensemble ordonné de deux éléments. Écrire $(a\,;\,b) = (a'\,;\,b')$ signifie que $a = a'$ et $b = b'$.

L'écriture $(x\,;\,y\,;\,z)$ désigne un *triplet* c'est-à-dire un ensemble ordonné de trois éléments. Écrire $(a\,;\,b\,;\,c) = (a'\,;\,b'\,;\,c')$ signifie que $a = a'$, $b = b'$ et $c = c'$.

> Définition **2**. Soit A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E.
>
> L'*intersection* des ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui sont communs à A et à B. L'intersection est notée $A \cap B$ (lire « A inter B »).
>
> La *réunion* des ensembles A et B, est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A ou à B (ou aux deux à la fois). L'union est notée $A \cup B$ (« A union B »).
>
> $$A \cap B = \{x \in E, x \in A \text{ et } x \in B\} \text{ et } A \cup B = \{x \in E, x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

Il est pratique et intuitif d'utiliser un *diagramme de Venn* :

Ensemble **Inclusion** **Intersection** **Réunion**



Ensemble	Inclusion	Intersection	Réunion
$e \in E$	$B \subset A$	$e \in A \cap B$	$e \in A \cup B$,
$e' \notin E$	$e \in B$ donc $e \in A$	$e' \notin A \cap B$	$e' \in A \cup B$
			$c \notin A \cup B$

§3 Nombres

Il n'existe pas de nombre ; il n'existe que des ensembles de nombres.

M. Choquet

Les *entiers naturels* sont les nombres avec lesquels on peut compter des objets. L'ensemble de tous les entiers naturels est désigné [1] par la lettre $\mathbb{N}$.

$$\mathbb{N} = \{\,0\,;\,1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,\dots\}.$$

$\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des *entiers* (relatifs) :

$$\mathbb{Z} = \{\dots\,;\,-3\,;\,-2\,;\,-1\,;\,0\,;\,1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,\dots\}.$$

(1). La convention est d'écrire les ensembles de nombres en caractères gras **N**, **R** ou **Q**. Dans ce cours, on conservera néanmoins l'habitude des écritures manuscrites doubles $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Q}$.

Les ensembles[1] $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ sont dits *discrets* : ils sont composés d'éléments isolés, séparés.

On notera, pour a et b entiers, $[\![a\,;\, b]\!] = [\, a\,;\, b\,] \cap \mathbb{Z}$.

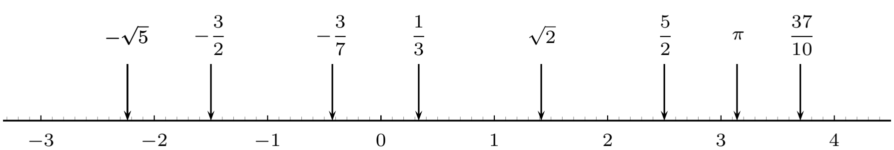
$\mathbb{Q}$ désigne l'ensemble des (nombres) *rationnels*. Un rationnel est un quotient de deux nombres entiers : r est rationnel si, et seulement si, $r = \dfrac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.

Un nombre qui n'est pas rationnel, comme[2] π ou $\sqrt{2}$, est dit *irrationnel*.

Les rationnels et leur écriture sous forme de fractions sont mal maîtrisés même en terminale[3]. Rappelons l'idée élémentaire : le rationnel $\frac{a}{b}$ (où $b \neq 0$) est l'unique solution de l'équation à trou « $a = \ldots \times b$. » $\frac{a}{b}$ est donc le résultat de la division de a par b (relisez : « dans a, combien de *fois* y-a-t-il b ? »). Cette division peut ne pas « s'arrêter » ce qui nécessite de désigner le résultat par une écriture appropriée comme $\frac{a}{b}$. Rappelons aussi que l'écriture $\frac{a}{b}$ n'est pas unique : l'équation à trou pouvant être multipliée par n'importe quel nombre non nul k, on a $\frac{a}{b} = \frac{ka}{kb}$.

À notre niveau, nous dirons que l'ensemble des nombres *réels* est constitué de toutes les abscisses possibles des points situés sur un axe gradué. L'ensemble des (nombres) réels est désigné par $\mathbb{R}$.

Les (nombres) réels sont donc tous les nombres qui servent à mesurer des longueurs ainsi que leur opposé. Cet axe gradué, appelé *droite réelle*, jette un pont fructueux entre le champ des nombres réels et la géométrie.



Rappelons les notations pour les *intervalles* et leur interprétation avec des inégalités :

dire que	signifie	l'intervalle est	dire que	signifie	l'intervalle est
$x \in [\, a\,;\, b\,]$	$a \leqslant x \leqslant b$	*fermé*			
$x \in \,]\, a\,;\, b\,]$	$a < x \leqslant b$	*ouvert en a, fermé en b*	$x \in \,]-\infty\,;\, b\,]$	$x \leqslant b$	*fermé (en b)*
$x \in [\, a\,;\, b\,[$	$a \leqslant x < b$	*fermé en a, ouvert en b*	$x \in [\, a\,;\, +\infty\,[$	$a \leqslant x$	*fermé (en a)*
$x \in \,]\, a\,;\, b\,[$	$a < x < b$	*ouvert*	$x \in \,]-\infty\,;\, b\,[$	$x < b$	*ouvert (en b)*
			$x \in \,]\, a\,;\, +\infty\,[$	$a < x$	*ouvert (en a)*

intervalle borné *intervalle non borné*

Dans la mesure où $+\infty$ et $-\infty$ ne sont pas des réels (ce sont des *limites*), un intervalle est toujours ouvert du côté d'une borne infinie.

$$\mathbb{R} = \,]-\infty\,;\, +\infty\,[\,.$$

On pose également :

$$\mathbb{R}_+ = [\,0\,;\, +\infty\,[\text{ et } \mathbb{R}_- = \,]-\infty\,;\, 0\,]\,.$$

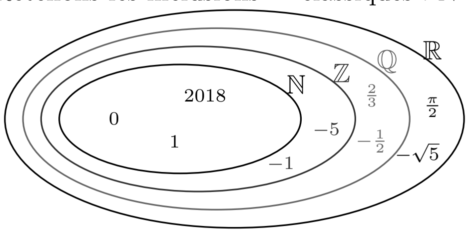
(1). Les définitions données ici des ensembles de nombres sont celles, intuitives, préconisées en lycée.
(2). L'irrationalité de $\sqrt{2}$ est prouvée page 21 ; celle de π (admise) tient de la culture générale.
(3). Le lecteur est invité à passer le temps qu'il faut jusqu'à ce que ce point soit clair.

Une étoile en exposant prive l'ensemble de l'élément nul 0 : $\mathbb{N}^* = \{1\,;2\,;3\,;4\,;\ldots\}$.

$$\mathbb{R}^* = \left]-\infty\,;0\right[\cup \left]0\,;+\infty\right[\;; \qquad \mathbb{R}^*_+ = \left]0\,;+\infty\right[\;; \qquad \mathbb{R}^*_- = \left]-\infty\,;0\right[.$$

L'ensemble $\mathbb{R}$ et tous les intervalles de $\mathbb{R}$ sont dits *continus* (par opposition à $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ qui sont dits *discrets*).

Retenons les inclusions [(1)] classiques : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.



Tout x dans $\mathbb{Z}$ s'écrit $\dfrac{x}{1} \in \mathbb{Q}$ donc $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Tout rationnel r de $\mathbb{Q}$ peut être « construit » sur $\mathbb{R}$ (voir exercice suivant) donc $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

La question de savoir s'il existe des nombres « ailleurs que dans $\mathbb{R}$ », c'est-à-dire « quelque chose de plus grand que $\mathbb{R}$ » trouvera une réponse affirmative au chapitre Nombres Complexes.

Exercice **1** (une construction de r avec r rationnel). On considère un axe $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath})$ sur lequel I est le point d'abscisse 1. Soit $r = \frac{p}{q}$ un rationnel positif (p et q sont des entiers naturels, $q \neq 0$). Considérons un axe d'origine O, dirigé par un vecteur $\vec{u}$ non colinéaire à $\vec{\imath}$. Soit, sur cet axe, les points A et B d'abscisses respectives (entières) q et p. La parallèle à (BI) passant par A coupe (OI) en J. Calculer la distance OJ.

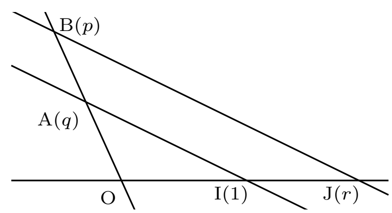
Solution **1**. L'énoncé fournit les hypothèses nécessaires pour appliquer le théorème de Thalès

$$\frac{\mathrm{OJ}}{\mathrm{OI}} = \frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}}.$$

On en déduit

$$\mathrm{OJ} = \mathrm{OI} \times \frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}} = 1 \times \frac{p}{q} = \frac{p}{q}.$$

c'est-à-dire $\boxed{\mathrm{OJ} = r.}$ ✓



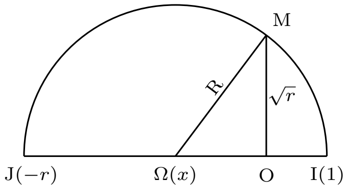
Définition **1** (racine carrée). Dire que b est la racine carrée du réel a positif signifie que b est un réel positif et que $b^2 = a$. On note $b = \sqrt{a}$.

✎ Les carrés parfaits de 1^2 à 15^2 : 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225 doivent être parfaitement (re)connus.

(1). La construction des ensembles de nombres est ici étagée par inclusions successives mais cela ne correspond pas à l'ordre dans lequel historiquement ces ensembles ont été définis et étudiés. Le lecteur curieux se reportera aux annexes page 583.

Exercice 2 (une construction de $\sqrt{r}$ où r est rationnel). On considère un axe $(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath})$ sur lequel I est le point d'abscisse 1. Soit r un rationnel positif. On construit par la méthode de l'exercice précédent le point J d'abscisse $-r$ sur $(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath})$ puis on trace le cercle de diamètre [IJ]. La perpendiculaire à (OI) passant par O coupe le cercle en M et N. Calculer la distance OM.

Solution **2**. Le centre Ω du cercle a pour abscisse $x = \frac{1-r}{2}$ et le cercle a pour rayon $\mathrm{R} = \frac{1+r}{2}$. D'après le théorème de Pythagore dans ΩOM rectangle en Ω, $\mathrm{OM}^2 = \Omega\mathrm{M}^2 - \Omega\mathrm{O}^2$



$$\mathrm{OM}^2 = \mathrm{R}^2 - x^2 = \left(\frac{1+r}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-r}{2}\right)^2$$
$$= \frac{\cancel{1} + 2r + \cancel{r^2} - \cancel{1} + 2r - \cancel{r^2}}{4} = r.$$

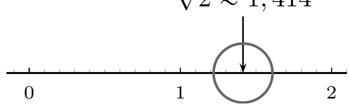
Conclusion : $\boxed{\mathrm{OM} = \sqrt{r}.}$ ✓

L'habitude est ancrée de travailler avec des nombres décimaux ; les calculatrices le font bien ! Malheureusement, tous les réels ne sont pas des décimaux. Précisons donc la façon de donner une approximation d'un réel par un nombre décimal à n décimales.

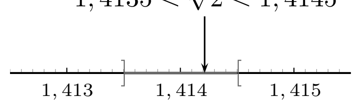
Définition 2 (valeur arrondie). Soit x un réel et d un rationnel de la forme $d = \dfrac{\mathrm{D}}{10^n}$ où D est un entier et n un entier naturel. Dire que d est la *valeur arrondie à n décimales* de x signifie que $d - \dfrac{1}{2}10^{-n} \leqslant x < d + \dfrac{1}{2}10^{-n}$. On note $x \approx d$.

Autrement dit, d est le nombre décimal à n décimales le plus proche du réel x. Ainsi $3,4 \approx 3$. Notons que si $x = 3,5$, il n'est pas très pertinent d'écrire $x \approx 3$; autant préciser tout de suite $x = 3,5$.

$\sqrt{2} \approx 1,414$



$1,4135 < \sqrt{2} < 1,4145$



Donner la *valeur exacte* d'un réel x c'est donner une expression permettant de désigner sur un axe réel le point dont l'abscisse est *exactement* x (et pas « un tout petit peu à côté mais pas loin »). Cette expression peut nécessiter des fractions, des radicaux ou des constantes remarquables comme π ou e. Par exemple, le nombre d'or φ est l'unique solution positive de l'équation $x^2 = x + 1$. On obtient $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618$.

Dans la notation $x \approx d$, pour connaître la précision de l'approximation, il faut écrire les n décimales de d, y compris si les dernières décimales sont des zéros.

Hors indication contraire, les réponses attendue sont des *valeurs exactes*. Une valeur approchée ne constitue donc pas une réponse acceptable. Ainsi, une égalité ne peut jamais être justifiée par des valeurs arrondies. De plus, en général, $x \neq d$. On ne peut donc pas remplacer x par d dans des calculs, cela reviendrait à enchaîner des arrondis.