Chapitre I

INTÉGRALE DE RIEMANN

I.1. Introduction

L'intégrale de Riemann a été en général construite dans le cours de Licence 1. Bien que, dans la pratique, elle suffise pour intégrer les fonctions usuelles (**toutes les fonctions continues par morceaux sont Riemann-intégrables**), elle présente certains inconvénients.

D'une part, on n'intègre que des *fonctions bornées* sur des *parties bornées* de $\mathbb{R}$ (intervalles compacts), ou de $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3, \ldots$. Il y a bien une notion d'intégrale généralisée, mais elle ne se présente que comme une *limite* d'intégrales. D'autre part, il faut des conditions très fortes pour intervertir les intégrales itérées (f continue par rapport aux deux variables sur le compact $[a, b] \times [c, d]$, par exemple). On peut citer d'autres inconvénients ; par exemple pour avoir la convergence des intégrales d'une suite de fonctions intégrables, on a besoin de supposer la convergence uniforme de cette suite.

Le désir de pouvoir intégrer le plus de fonctions possible (notamment pour calculer leurs coefficients de Fourier afin de pouvoir développer en série de Fourier le plus de fonctions possible) a conduit à introduire une nouvelle façon de construire des intégrales : l'*intégrale de Lebesgue*.

Bien que cette nouvelle intégrale soit construite de façon différente de celle de Riemann, elle *redonne celle-ci* : lorsque f est Riemann-intégrable (au sens propre : sur un intervalle compact), alors elle l'est au sens de Lebesgue (du moins si l'on a supposé la mesurabilité de f), et les deux intégrales coïncident. Cela reste vrai pour les intégrales de Riemann généralisées, à condition qu'elles soient *absolument convergentes*. Néanmoins, s'il ne s'agissait que de pouvoir intégrer plus de fonctions, l'introduction de l'intégrale de Lebesgue ne se justifierait pas (en effet, comme on l'a dit au début, toutes les fonctions que l'on utilise en pratique sont Riemann-intégrables) ; mais il s'est avéré que l'intégrale de Lebesgue possédait de nombreux avantages sur l'intégrale de Riemann, qui font qu'elle est indispensable dès que l'on fait des mathématiques dépassant le cadre des deux premières années universitaires.

Tout d'abord, elle permet de montrer *simplement* (car ils découlent de sa nature même) de "bons" théorèmes de convergence et de passage à la limite sous le signe intégral, d'*utilisation simple* : *Théorème de convergence monotone*, *Théorème* *de convergence dominée*. Si en fait des versions de ces théorèmes peuvent être montrées dans le cadre de l'intégrale de Riemann, les preuves deviennent alors très délicates, et il y a besoin de savoir *a priori* que les limites sont Riemann-intégrables. Mais ce n'est pas là le point principal. Une des grandes supériorité de l'intégrale de Lebesgue est que l'on peut toujours calculer une intégrale double sur un produit d'intervalles (si la fonction y est intégrable) par intégration successive de deux intégrales simples (Théorème de Fubini).

Surtout, l'intégrale de Lebesgue peut se construire dans des situations très générales, de même que l'on peut définir des espaces topologiques généraux, et pas seulement considérer la topologie de $\mathbb{R}^n$, et elle permet d'associer des *espaces vectoriels normés* **complets** (qui sont justement les complétés de ceux que l'on pourrait introduire avec l'intégrale de Riemann), les espaces de Lebesgue, qui vont permettre d'obtenir de nombreux *théorèmes d'existence*, en Analyse Fonctionnelle notamment.

Bien sûr, ces avantages sont associés quelques inconvénients : l'intégrale de Lebesgue va être plus longue à construire et il va falloir introduire la notion d'ensemble mesurable et de fonction mesurable (celles qui seront susceptibles d'être intégrées). Il va aussi s'introduire la notion de propriété *vraie presque partout*, mais qui est d'une importance primordiale (notamment en Probabilités, sous le nom de propriété *vraie presque sûrement*).

L'intégrale de Riemann restant la plus adaptée quand on ne parle que de fonctions continues (ou continues par morceaux, et *qui sont celles que l'on utilise en pratique*), il est **indispensable** de bien savoir la manipuler ; aussi ce premier chapitre sera consacré à rappeler la construction et les principales propriétés de l'intégrale de Riemann.

I.2. Construction de l'intégrale de Riemann

I.2.1. Introduction

Tout d'abord, qu'est-ce qu'une intégrale ?

Il y a beaucoup d'interprétations possibles, mais nous ne retiendrons que celle-ci, qui est d'ailleurs sans doute la première chronologiquement (et peut-être la première en importance) :

Étant donnée une fonction *positive* f, définie disons sur un intervalle $[a, b]$, on cherche à mesurer l'**aire** (cette mesure, si elle existe, sera aussi appelée l'aire de G_f^-) de la partie G_f^- du plan se trouvant entre le graphe G_f de f et l'axe des abscisses (voir Figure I.1). C'est cette valeur I_f que l'on appellera l'*intégrale de f sur* $[a, b]$.

Ce que l'on sait bien mesurer, ce sont les **rectangles**, et plus géréralement les réunions d'un nombre fini de rectangles disjoints. Lorsque ces rectangles ont un côté porté par l'axe des abscisses, ils sont les sous-graphes de fonctions constantes sur des sous-intervalles de leur domaine de définition. On appelle ces fonctions des *fonctions en escalier*. On peut donc ainsi donner la mesure de l'aire de leur sous-graphe, c'est-à-dire définir leur intégrale.

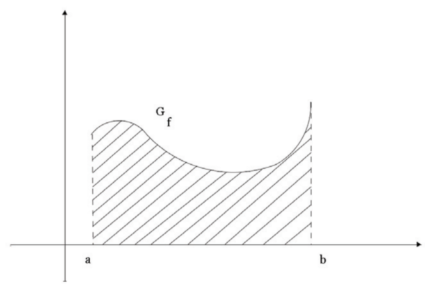

FIGURE I.1 –

Si l'on veut s'affranchir de la positivité de la fonction, on en tiendra compte en affectant un signe négatif à l'aire correspondante.

Notons que, puisque l'on ne considère qu'un nombre fini de rectangles, le domaine de définition est forcément une **partie bornée de** $\mathbb{R}$. Dans la suite, on ne considèrera donc que des fonctions définies sur un **intervalle compact** $[a, b]$ de $\mathbb{R}$.

Exemple. Sur $[a, b] = [0, 3]$, considérons la fonction f définie par $f(x) = 1$ si $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $f(x) = -2$ si $1 < x \leqslant 3$ (voir Figure I.2).

Il est naturel de poser :

$$I_f = (\text{aire de } A_1) - (\text{aire de } A_2) = 1 \times (1 - 0) - 2 \times (3 - 1) = -3\,.$$

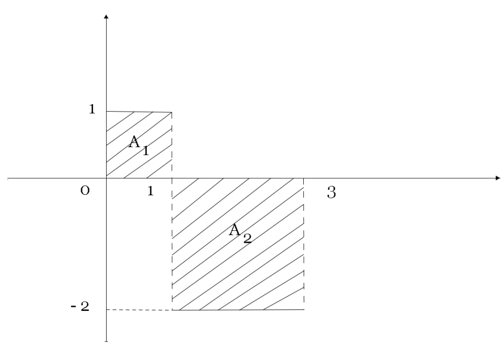

FIGURE I.2 –

I.2.2. Fonctions en escalier

Définition I.2.1. *On appelle* subdivision *de l'intervalle* $[a,b]$ *tout ensemble* fini $p = \{x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}\}$ *de points de* $[a,b]$ *tels que :*

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} = b\,.$$

On notera $p\colon a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} = b$*.*

Définition I.2.2. *On dit qu'une fonction* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *est* en escalier *s'il existe une subdivision* $p_f\colon a = \xi_0 < \xi_1 < \cdots < \xi_N < \xi_{N+1} = b$ *de* $[a,b]$ *telle que* f *soit constante, égale à* c_k*, sur chaque intervalle ouvert* $]\xi_k, \xi_{k+1}[\,,\ 0 \leqslant k \leqslant N$*.*

Notons que les valeurs de f en $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_N, \xi_{N+1}$ peuvent être arbitraires.

Définition I.2.3. *Pour une telle fonction* f*, on pose :*

$$\boxed{I_f = \sum_{k=0}^{N} (\xi_{k+1} - \xi_k)\, c_k}\,,$$

*et on dit que c'est l'*intégrale de f sur $[a,b]$.

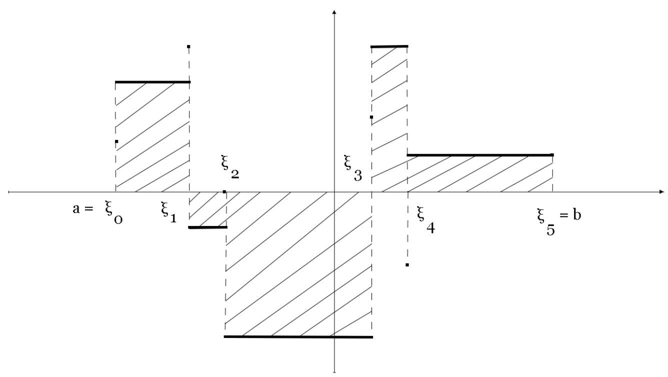

FIGURE I.3 –

Remarque. Pour que cela ait un sens, il faut vérifier que, si pour une autre subdivision $p'\colon a = \xi'_0 < \xi'_1 < \cdots < \xi'_L < \xi'_{L+1} = b$, f est constante et égale à c'_l sur $]\xi'_l, \xi'_{l+1}[\,,$ $0 \leqslant l \leqslant L$, alors :

$$\sum_{l=0}^{L} (\xi'_{l+1} - \xi'_l)\, c'_l = \sum_{k=0}^{N} (\xi_{k+1} - \xi_k)\, c_k\,.$$

C'est un petit peu pénible à écrire, mais on peut s'en convaincre en faisant un dessin.

Il s'agit maintenant, pour une fonction arbitraire $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, d'essayer de définir son intégrale. L'idée est d'approcher f par des fonctions en escalier φ et ψ, et plus précisément, de l'*encadrer*, de façon que les intégrales I_φ et I_ψ soient de plus en plus proches. Lorsqu'il s'avérera que ces intégrales tendent vers une même limite, on pourra alors définir l'intégrale de f comme étant cette limite. Cet encadrement va être fait à l'aide des *sommes de Darboux* (que Darboux a introduites en 1875). Notons que, comme les fonctions en escalier sont bornées, cela n'est possible que si **la fonction f est bornée.**

I.2.3. Sommes de Darboux

Dans tout ce qui suit, on se donne une fonction $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ **bornée** sur un **intervalle compact** $[a,b]$.

Pour toute subdivision

$$p\colon a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} = b$$

de $[a,b]$, les nombres :

$$\begin{cases} m_k = \inf\limits_{x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1}} f(x) \\ M_k = \sup\limits_{x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1}} f(x) \end{cases}$$

existent, dans $\mathbb{R}$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$, puisque f est bornée. On pose :

$$\boxed{\begin{cases} s_p(f) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (x_{k+1} - x_k) m_k\,, \\ S_p(f) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (x_{k+1} - x_k) M_k\,. \end{cases}}$$

$s_p(f)$ est appelée la *somme de Darboux inférieure* de f pour la subdivision p et $S_p(f)$ la *somme de Darboux supérieure*.

On a évidemment $\boxed{s_p(f) \leqslant S_p(f)}$.

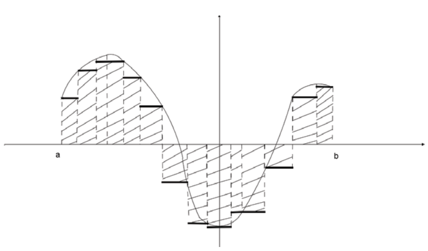

FIGURE I.4 –

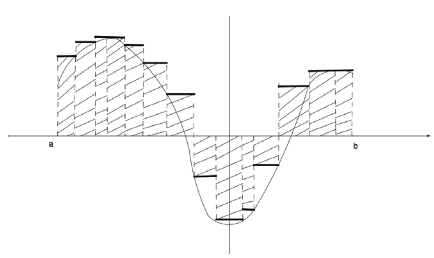

FIGURE I.5 –

Notons que si φ et ψ sont les fonctions en escalier définies par :

$$\varphi(x) = m_k \quad ; \qquad \psi(x) = M_k \quad , \qquad x_k < x < x_{k+1}\,,\ 0 \leqslant k \leqslant n\,;$$

et $\varphi(x_k) = \psi(x_k) = f(x_k)$ pour $0 \leqslant k \leqslant n+1$, alors :

$$\boxed{\varphi \leqslant f \leqslant \psi} \quad \text{et} \quad \boxed{s_p(f) = I_\varphi \text{ et } S_p(f) = I_\psi}\,.$$

On a donc encadré f par deux fonctions en escalier φ et ψ, auxquelles on sait associer une intégrale. Le problème est donc de savoir quand on peut rendre la différence $I_\psi - I_\varphi$ aussi petite que l'on veut, ce qui permettra de définir l'intégrale de f. Intuitivement (voir Figure I.4 et Figure I.5), ce va être possible si et seulement si f n'"oscille" pas trop.

I.2.4. Construction

Définition I.2.4. *On dit qu'une subdivision p' de $[a,b]$ est* plus fine *que la subdivision p (et que p est* moins fine *que p') si, au sens ensembliste, on a $p' \supseteq p$.*

En d'autre termes, on ajoute des points à p pour obtenir p'.

Le point *essentiel* pour la construction de l'intégrale de Riemann est le suivant.

Théorème I.2.5. *Si p' est plus fine que p, alors :*

$$\boxed{s_{p'}(f) \geqslant s_p(f)} \qquad \textit{et} \qquad \boxed{S_{p'}(f) \leqslant S_p(f)}\,.$$

Autrement dit, *les sommes de Darboux inférieures croissent* (lorsque l'on raffine les subdivisions) et les *sommes de Darboux supérieures décroissent.*

Preuve. Il suffit de le faire par récurrence sur le nombre de points que l'on ajoute à p. On peut donc supposer que $p' = p \cup \{c\}$, avec $c \notin p$. Soit l l'entier tel que $x_l < c < x_{l+1}$. Les termes $(x_{k+1} - x_k)m_k$ et $(x_{k+1} - x_k)M_k$ avec $k \neq l$ ne changent pas. Pour $k = l$, on a :

$$\begin{cases} \inf f([x_l, c]) = m'_l \geqslant m_l & \text{et} \qquad \inf f([c, x_{l+1}]) = m''_l \geqslant m_l \\ \sup f([x_l, c]) = M'_l \leqslant M_l & \text{et} \qquad \sup f([c, x_{l+1}]) = M''_l \leqslant M_l\,; \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} (x_{l+1} - c)m''_l + (c - x_l)m'_l \geqslant (x_{l+1} - c)m_l + (c - x_l)m_l = (x_{l+1} - x_l)m_l \\ (x_{l+1} - c)M''_l + (c - x_l)M'_l \leqslant (x_{l+1} - c)M_l + (c - x_l)M_l = (x_{l+1} - x_l)M_l\,, \end{cases}$$

et par conséquent $s_{p\cup\{c\}}(f) \geqslant s_p(f)$ et $S_{p\cup\{c\}}(f) \leqslant S_p(f)$. □

Corollaire I.2.6. *Si p et q sont deux subdivisions quelconques de $[a,b]$, alors :*

$$\boxed{s_p(f) \leqslant S_q(f)}\,.$$

En effet, $s_p(f) \leqslant s_{p\cup q}(f) \leqslant S_{p\cup q}(f) \leqslant S_q(f)$. □

Proposition I.2.7. *Soit $\mathscr{S}$ l'ensemble des subdivisions de $[a,b]$. Alors :*

1) $\boxed{\sigma(f) = \sup_{p\in\mathscr{S}} s_p(f)}$ *existe, dans* $\mathbb{R}$ *;*
2) $\boxed{\Sigma(f) = \inf_{p\in\mathscr{S}} S_p(f)}$ *existe, dans* $\mathbb{R}$ *;*
3) $\boxed{\sigma(f) \leqslant \Sigma(f)}$.

Le nombre $\sigma(f)$ s'appelle l'**intégrale inférieure** de f sur $[a,b]$ et $\Sigma(f)$ l'**intégrale supérieure** de f sur $[a,b]$.

Définition I.2.8. *On dit que la fonction bornée $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ est* **intégrable** (au sens de Riemann) *sur $[a,b]$ si son intégrale inférieure est égale à son intégrale supérieure : $\sigma(f) = \Sigma(f)$.*

*Cette valeur commune s'appelle l'***intégrale** (de Riemann) *de f sur $[a,b]$ et est notée :*

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx}.$$

On dira aussi que f est *Riemann-intégrable*, ou *R-intégrable*, sur $[a,b]$.

On notera que ce n'est **jamais** avec cette définition que l'on *calcule* une intégrale.

Notons toutefois que, d'après cette définition :

f est Riemann-intégrable si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision p telle que $0 \leqslant S_p(f) - s_p(f) \leqslant \varepsilon$.

Cela signifie que f est Riemann-intégrable si et seulement si elle n'*oscille pas trop* sur les sous-intervalles de $[a,b]$, aussi petits soient-ils.

On notera aussi que, pour toute subdivision p, on a :

$$\boxed{0 \leqslant \Sigma(f) - \sigma(f) \leqslant S_p(f) - s_p(f)}.$$

Preuve de la Proposition I.2.7. Pour chaque $q \in \mathscr{S}$, fixé pour l'instant, on a $s_p(f) \leqslant S_q(f)$, par le Corollaire I.2.6. L'ensemble des $s_p(f)$, pour $p \in \mathscr{S}$ est donc majoré, par $S_q(f)$; il admet donc une borne supérieure $\sigma(f)$, vérifiant $\sigma(f) \leqslant S_q(f)$. Mais ceci étant vrai pour toute subdivision q, l'ensemble des $S_q(f)$, pour $q \in \mathscr{S}$, a donc une borne inférieure $\Sigma(f)$, qui vérifie $\sigma(f) \leqslant \Sigma(f)$. □

Remarque. Tout ce qui a été dit est valable aussi pour $b = a$; mais dans ce cas, toutes les sommes de Darboux sont nulles : toute fonction bornée sur un intervalle réduit à un point est intégrable, et son intégrale est égale à 0.

Définition I.2.9. *Si $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ est une fonction à valeurs complexes, on dit que f est intégrable si* $\operatorname{Re} f$ *et* $\operatorname{Im} f$ *sont intégrables, et l'on pose :*

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \operatorname{Re} f(x)\,dx + i\int_a^b \operatorname{Im} f(x)\,dx}\,.$$

On notera, puisque $\int_a^b \operatorname{Re} f(x)\,dx$ et $\int_a^b \operatorname{Im} f(x)\,dx$ sont des nombres réels, que l'on a donc :

$$\boxed{\operatorname{Re}\left[\int_a^b f(x)\,dx\right] = \int_a^b \operatorname{Re} f(x)\,dx} \quad \text{et} \quad \boxed{\operatorname{Im}\left[\int_a^b f(x)\,dx\right] = \int_a^b \operatorname{Im} f(x)\,dx}\,.$$

I.2.5. Exemples

Donnons d'abord deux exemples très simples.

1) Si f est constante, et égale à C, sur $[a,b]$, alors f est intégrable sur $[a,b]$ et $\displaystyle\int_a^b C\,dx = C(b-a)$.

En effet, pour toute subdivision p, on a $s_p(f) = S_p(f) = C(b-a)$.

2) Donnons un exemple de fonction qui n'est *pas* Riemann-intégrable (dû à Dirichlet, vers 1830). Considérons la fonction $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ valant 1 si x est rationnel et 0 si x est irrationnel. Comme tout intervalle de longueur strictement positive contient à la fois des rationnels et des irrationnels, on a, pour toute subdivision p, $m_k = 0$ et $M_k = 1$ pour tout $k = 0, 1, \ldots, n$, et donc $s_p(f) = 0$ et $S_p(f) = b-a$, de sorte que $\sigma(f) = 0$ et $\Sigma(f) = b-a$.

Cette fonction n'est pas Riemann-intégrable car *elle oscille trop* sur chaque sous-intervalle de $[a,b]$. Pourtant, nous verrons qu'elle est intégrable au sens de Lebesgue.

Passons maintenant à des exemples plus intéressants.

Pour les fonctions en escalier, nous avons défini une intégrale ; nous en avons maintenant une autre ; heureusement, elles sont identiques.

Proposition I.2.10. *Toute fonction en escalier est Riemann-intégrable, et les deux notions d'intégrales coïncident : si* $f(x) = c_k$ *pour* $\xi_k < x < \xi_{k+1}$, $0 \leqslant k \leqslant N$, *avec* $a = \xi_0 < \xi_1 < \cdots < \xi_N < \xi_{N+1} = b$, *alors :*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{N} (\xi_{k+1} - \xi_k) c_k\,.$$

Rappelons que cette dernière expression avait été notée I_f, notation que nous n'utiliserons plus.

Preuve. Cela semble évident, et l'est presque, mais il faut faire attention aux valeurs $f(\xi_k)$.

Pour les circonvenir, on va introduire une subdivision plus fine que p_0 : $a = \xi_0 < \xi_1 < \cdots < \xi_N < \xi_{N+1} = b$. Pour tout $\varepsilon > 0$, suffisamment petit pour que l'on ait :

$$a = \xi_0 < \xi_0 + \frac{\varepsilon}{2(N+1)} < \xi_1 - \frac{\varepsilon}{2(N+1)} < \xi_1 < \cdots$$
$$< \cdots < \xi_N < \xi_N + \frac{\varepsilon}{2(N+1)} < \xi_{N+1} - \frac{\varepsilon}{2(N+1)} < \xi_{N+1} = b\,,$$