HEC ESCP EM-Lyon 2010
Math. III

Durée : 4 heures

Exercice

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 à coefficients réels. On confond polynôme de E et fonction polynomiale associée définie sur $\mathbb{R}$.
Soit d l'application définie sur E qui à tout polynôme P, associe le polynôme $d(P) = P'$, où P' désigne la dérivée de P.

1°) Rappeler, sans démonstration, la dimension de E et la base canonique notée $\mathcal{B}$ de E.

2°) Montrer que d est un endomorphisme de E et donner la matrice associée à d dans la base $\mathcal{B}$.

3°) Déterminer le noyau de d, $\operatorname{Ker} d$, l'image de d, $\operatorname{Im} d$, ainsi que leurs dimensions respectives.

4°) Déterminer les valeurs propres de d ainsi que les polynômes propres associés. L'endomorphisme d est-il diagonalisable ?

On désigne par $(d^k)_{k\geq 0}$, la suite d'endomorphismes de E définie par : $d^0 = I$, où I représente l'endomorphisme identité et, pour tout k de $\mathbb{N}$, $d^{k+1} = d^k \circ d$. Pour tout k de $\mathbb{N}$, $\operatorname{Ker} d^k$ désigne le noyau de d^k.

5°) a) Déterminer pour tout k de $[\![1,4]\!]$, le sous-espace $\operatorname{Ker} d^k$ ainsi que sa dimension.
Vérifier que pour tout k de $[\![1,4]\!]$, $d(\operatorname{Ker} d^k) \subset \operatorname{Ker} d^k$.

b) Soit P un polynôme de degré r, avec $r \in [\![0,3]\!]$. Montrer que la famille $(d^k(P))_{0\leq k\leq r}$ est libre.

6°) Dans cette question, on cherche à déterminer les sous-espaces vectoriels F de E tels que $d(F) \subset F$.

a) On suppose que $\dim F = 1$. Montrer que F est un sous-espace propre de d. En déduire F.

b) On suppose que $\dim F = 2$. Montrer qu'il existe dans F un polynôme P de degré supérieur ou égal à 1. En déduire F.

c) On suppose que $\dim F = 3$. On note $\widetilde{d}$ l'endomorphisme de F défini par : pour tout P de F, $\widetilde{d}(P) = d(P)$. Montrer que $(\widetilde{d})^3 = 0$. En déduire F.

Problème

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans ce problème sont supposées définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Sous réserve d'existence, on note $E(X)$ et $V(X)$ respectivement, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X et $\operatorname{Cov}(X,Y)$ la covariance de deux variables aléatoires X et Y.

Dans les parties **I** et **III**, la fonction de répartition et une densité d'une variable aléatoire X à densité sont notées respectivement F_X et f_X.
On admet que les formules donnant l'espérance et la variance d'une somme de variables aléatoires discrètes, ainsi que la définition et les propriétés de la covariance et du coefficient de corrélation linéaire de deux variables aléatoires discrètes, s'appliquent au cas de variables à densité.
Pour n entier supérieur ou égal à 2, on dit que les variables aléatoires à densité $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont indépendantes si pour tout n-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de réels, les événements $[X_1 \leqslant x_1], [X_2 \leqslant x_2], \ldots, [X_n \leqslant x_n]$ sont indépendants.
L'objet du problème est double : d'une part, montrer certaines analogies entre les lois géométrique et exponentielle, d'autre part, mettre en évidence quelques propriétés asymptotiques de variables aléatoires issues de la loi exponentielle. La partie II est indépendante de la partie I. La partie III est indépendante de la partie II et largement indépendante de la partie I.

Partie I. Loi exponentielle

1°) a) Rappeler la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}dt$. Etablir, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\mathrm{e}^{-t}\,dt$.
On pose alors $I_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}dt$ et, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\mathrm{e}^{-t}dt$.

b) Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$. A l'aide d'une intégration par parties, établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1}. En déduire la valeur de I_n en fonction de n.

Soit λ un réel strictement positif. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes, de même loi exponentielle de paramètre λ (d'espérance $1/\lambda$). On pose : $Y = X_1 - X_2$, $T = \max(X_1, X_2)$ et $Z = \min(X_1, X_2)$.

2°) Justifier les relations : $T + Z = X_1 + X_2$ et $T - Z = |X_1 - X_2| = |Y|$.

3°) a) Rappeler sans démonstration les valeurs respectives de $V(X_1)$ et de $P(X_1 \leqslant x)$, pour tout réel x.

b) Calculer $E(X_1 + X_2)$, $V(X_1 + X_2)$, $E(Y)$ et $V(Y)$.

4°) Déterminer pour tout réel z, $F_Z(z)$ et $f_Z(z)$. Reconnaître la loi de Z et en déduire $E(Z)$ et $V(Z)$.

5°) a) Montrer que pour tout réel t, on a $F_T(t) = \begin{cases} (1-\mathrm{e}^{-\lambda t})^2 & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$.
Exprimer pour tout réel t, $f_T(t)$.

b) Justifier l'existence de $E(T)$ et $V(T)$. Montrer que $E(T) = \dfrac{3}{2\lambda}$ et $V(T) = \dfrac{5}{4\lambda^2}$ (on pourra utiliser des changements de variables affines).

6°) On note r le coefficient de corrélation linéaire de Z et T.
Montrer que $r = 1/\sqrt{5}$.

7°) a) Préciser $Y(\Omega)$ et $|Y|(\Omega)$.

b) Déterminer une densité de la variable aléatoire $-X_2$.

c) Montrer que pour tout réel y, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(t) f_{-X_2}(y-t)\,dt$ est convergente et qu'elle vaut $\dfrac{\lambda}{2}\mathrm{e}^{-\lambda|y|}$ (on distinguera les deux cas $y \geqslant 0$ et $y < 0$).

d) Etablir que la fonction $y \mapsto \dfrac{\lambda}{2}\mathrm{e}^{-\lambda|y|}$ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$; on admet que c'est une densité de la variable aléatoire Y.

e) Déterminer pour tout y réel, $f_{|Y|}(y)$. Reconnaître la loi de $|Y| = T - Z$.

Partie II. Loi géométrique

Soit p un réel de $]0,1[$ et $q = 1 - p$. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes et de même loi géométrique de paramètre p (d'espérance $1/p$).

On pose $Y = X_1 - X_2, T = \max(X_1, X_2)$ et $Z = \min(X_1, X_2)$. On rappelle que $T + Z = X_1 + X_2$ et $T - Z = |X_1 - X_2| = |Y|$.

8°) a) Rappeler sans démonstration les valeurs respectives de $V(X_1)$ et de $P(X_1 \leqslant k)$, pour tout k de $X_1(\Omega)$.

b) Calculer $E(X_1 + X_2)$, $V(X_1 + X_2)$, $E(X_1 - X_2)$ et $V(X_1 - X_2)$.

c) Etablir la relation $P(X_1 = X_2) = \dfrac{p}{1+q}$.

9°) a) Montrer que Z suit la loi géométrique de paramètre $1 - q^2$. En déduire $E(Z)$, $V(Z)$ et $E(T)$.

b) Soit k un entier de $\mathbb{N}^*$. Justifier l'égalité :

$$(Z = k) \cup (T = k) = (X_1 = k) \cup (X_2 = k)$$

En déduire la relation suivante : $P(T = k) = 2P(X_1 = k) - P(Z = k)$

c) Etablir la formule : $V(T) = \dfrac{q(2q^2 + q + 2)}{(1 - q^2)^2}$.

10°) a) Préciser $(T - Z)(\Omega)$. Exprimer pout tout j de $\mathbb{N}^*$, l'événement $(Z = j) \cap (Z = T)$ en fonction des événements $(X_1 = j)$ et $(X_2 = j)$.
En déduire pour tout j de $\mathbb{N}^*$, l'expression de $P((Z = j) \cap (Z = T))$.

b) Montrer que pour tout couple (j, ℓ) de $(\mathbb{N}^*)^2$, on a

$$P((Z = j) \cap (T - Z = \ell)) = 2p^2 q^{2j+\ell-2}$$

c) Montrer que pour tout k de $\mathbb{Z}$, $P(X_1 - X_2 = k) = \dfrac{pq^{|k|}}{1+q}$ (on distinguera trois cas : $k = 0, k > 0$ et $k < 0$).

d) En déduire la loi de la variable aléatoire $|X_1 - X_2|$.

e) Etablir à l'aide des questions précédentes que les variables aléatoires Z et $T - Z$ sont indépendantes.

11°) a) A l'aide du résultat de la question **10°) e)**, calculer $\operatorname{Cov}(Z,T)$. Les variables aléatoires Z et T sont-elles indépendantes ?

b) Calculer, en fonction de q, le coefficient de corrélation linéaire ρ de Z et T.

c) Déterminer la loi de probabilité du couple (Z,T).

d) Déterminer pour tout j de $\mathbb{N}^*$, la loi de probabilité conditionnelle de T sachant l'événement $(Z = j)$.

e) Soit j un élément de $\mathbb{N}^*$. On suppose qu'il existe une variable aléatoire D_j à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, dont la loi de probabilité est la loi conditionnelle de T sachant l'événement $(Z = j)$. Calculer $E(D_j)$.

Partie III. Convergences

Dans les questions **12°)** *à* **15°)***, λ désigne un paramètre réel strictement positif, inconnu.*

Pour n élément de $\mathbb{N}^*$, on considère un n-échantillon $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ de variables aléatoires à valeurs strictement positives, indépendantes, de même loi exponentielle de paramètre λ.

On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ et $J_n = \lambda S_n$.

12°) Calculer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $E(S_n)$, $V(S_n)$, $E(J_n)$ et $V(J_n)$.

13°) On admet qu'une densité f_{J_n} de J_n est donnée par :

$$f_{J_n}(x) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^{-x} x^{n-1}}{(n-1)!} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

a) A l'aide du théorème de transfert, établir pour tout n supérieur ou égal à 3, l'existence de $E\left(\dfrac{1}{J_n}\right)$ et de $E\left(\dfrac{1}{J_n^2}\right)$ et donner leurs valeurs respectives.

b) On pose pour tout n supérieur ou égal à 3 : $\widehat{\lambda}_n = \dfrac{n}{S_n}$. Justifier que $\widehat{\lambda}_n$ est un estimateur de λ. Est-il sans biais ? Calculer la limite, lorsque n tend vers l'infini, du risque quadratique associé à $\widehat{\lambda}_n$ en λ.

14°) Dans cette question, on veut déterminer un intervalle de confiance du paramètre λ au risque α. On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, et u_α le réel strictement positif tel que $\Phi(u_\alpha) = 1 - \dfrac{\alpha}{2}$.

a) Enoncer le théorème de la limite centrée. En déduire que la variable aléatoire N_n définie par $N_n = \lambda \dfrac{S_n}{\sqrt{n}} - \sqrt{n}$ converge en loi vers la loi normale centrée réduite.

b) En déduire que pour n assez grand, on a approximativement

$$P(-u_\alpha \leqslant N_n \leqslant u_\alpha) = 1 - \alpha$$

c) Montrer que pour n assez grand, l'intervalle $\left[(1 - \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}})\widehat{\lambda}_n, (1 + \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}})\widehat{\lambda}_n\right]$ est un intervalle de confiance de λ au risque α. On note λ_0 la réalisation de $\widehat{\lambda}_n$ sur le n-échantillon.

15°) Avec le n-échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ on construit un nouvel intervalle de confiance de λ au risque β ($\beta \neq \alpha$), tel que la longueur de cet intervalle soit k ($k > 1$) fois plus petite que celle obtenue avec le risque α.

a) Justifier l'existence de la fonction réciproque Φ^{-1} de Φ. Quel est le domaine de définition de Φ^{-1} ?

b) Etablir l'égalité : $\beta = 2\Phi\left(\frac{1}{k}\Phi^{-1}(\frac{\alpha}{2})\right)$. En déduire que $\beta > \alpha$. Ce dernier résultat était-il prévisible ?

Dans les questions **16°)** *à* **18°)***, on suppose que* $\lambda = 1$.

16°) On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $T_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$.
Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, pour tout réel x positif ou nul, on pose

$$g_n(x) = \int_0^x F_{T_n}(t)\,dt \text{ et } h_n(x) = \int_0^x t f_{T_n}(t)\,dt$$

a) Exprimer $h_n(x)$ en fonction de $F_{T_n}(x)$ et $g_n(x)$.

b) Déterminer pour tout réel t, l'expression de $F_{T_n}(t)$ en fonction de t.
Etablir pour tout n supérieur ou égal à 2, la relation

$$g_{n-1}(x) - g_n(x) = \frac{1}{n}F_{T_n}(x).$$

c) En déduire pour tout n de $\mathbb{N}^*$, pour tout réel x positif ou nul, l'expression de $g_n(x)$ en fonction de $x, F_{T_1}(x), \ldots, F_{T_n}(x)$.

d) Montrer que $F_{T_n}(x) - 1$ est équivalent à $-n\mathrm{e}^{-x}$, lorsque x tend vers $+\infty$.

e) Déduire des questions **c)** et **d)** l'existence de $E(T_n)$ et montrer que $E(T_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

17°) On veut étudier, dans cette question, la convergence en loi de la suite de variables aléatoires $(G_n)_{n\geq 1}$ définie par : pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $G_n = T_n - E(T_n)$.
On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\gamma_n = -\ln n + E(T_n)$ et on admet sans démonstration que la suite $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ est convergente. On note γ sa limite.

a) Montrer que pour tout x réel et n assez grand, on a

$$F_{G_n}(x) = \left(1 - \frac{1}{n}\mathrm{e}^{-(x+\gamma_n)}\right)^n$$

b) En déduire que pour tout réel x, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{G_n}(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-(x+\gamma)}}$.

c) Montrer que la fonction $F_G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F_G(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-(x+\gamma)}}$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire G à densité.
Conclure.

Solution

Exercice

Question 1.

On sait que $\dim E = 4$, la base canonique de E étant (P_0, P_1, P_2, P_3), où les polynômes P_k ($0 \leqslant k \leqslant 3$) sont définis ainsi :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ P_0(x) = 1,\ P_1(x) = x,\ P_2(x) = x^2 \text{ et } P_3(x) = x^3.$$

Rappelons que ces polynômes sont souvent notés : $1, X, X^2, X^3$, et c'est ainsi que nous les écrirons, en général, dans la suite de cet exercice lorsque nous parlerons de polynômes.

Question 2.

$\star$ Nous savons que la dérivation est linéaire : autrement dit, d est une application linéaire définie sur E.

D'autre part, pour tout $P \in E,\ \exists\,!(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ tel que :

$$P = \delta + \gamma X + \beta X^2 + \alpha X^3$$

Alors $\forall\, x \in \mathbb{R}, P(x) = \delta + \gamma x + \beta x^2 + \alpha x^3 \implies d(P)(x) = \gamma + 2\beta x + 3\alpha x^2$, c'est-à-dire :

$$d(P) = \gamma + 2\beta X + 3\alpha X^2$$

Ce qui prouve que $d(P) \in E$.

$$\boxed{\text{L'application } d \text{ est un endomorphisme de } E}$$

Remarque : on aurait pu dire : pour tout $P \in E, \deg(P) \leqslant 3$ donc $\deg(P') \leqslant 2$, donc $P' \in E$: or $P' = d(P)$, d'où $d(P) \in E$.

$\star$ On a : $\begin{cases} d(P_0) = d(1) = 0 \\ d(X) = 1 \quad ; \quad d(X^2) = 2X \quad ; \quad d(X^3) = 3X^2 \end{cases}$

La matrice M de d dans la base canonique de E est donc :

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

Question 3.

$\star$ On sait d'après le cours que $\operatorname{Im} d = \operatorname{Vect}(d(1), d(X), d(X^2), d(X^3))$, donc

$$\operatorname{Im} d = \operatorname{Vect}(0, 1, 2X, 3X^2) = \operatorname{Vect}(1, 2X, 3X^2)$$

En effet, le vecteur nul (ici le polynôme nul 0), s'il est dans une famille génératrice d'un espace vectoriel, peut en être retiré sans modifier l'espace en question.
Les trois polynômes $1, 2X$ et $3X^2$ forment une famille génératrice de $\operatorname{Im} d$.
D'autre part, ils forment une famille libre car ces trois polynômes sont échelonnés en degrés.

$$(1, 2X, 3X^2) \text{ (ou } (1, X, X^2)) \text{ est une base de } \operatorname{Im} d : \dim \operatorname{Im} d = 3$$

De plus $(1, X, X^2)$ est la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, et donc :

$$\boxed{\operatorname{Im} d = \mathbb{R}_2[X]}$$

$\star$ D'après le théorème du rang, $\dim E = \dim \operatorname{Ker} d + \dim \operatorname{Im} d$, ce qui donne $4 = \dim \operatorname{Ker} d + 3$, donc $\dim \operatorname{Ker} d = 1$.
On a vu que $d(1) = 0$, donc $1 = P_0 \in \operatorname{Ker} d$. De plus $P_0 \neq 0$, donc la famille (P_0) est une famille libre. (P_0) est une famille libre constituée d'un vecteur dans un espace de dimension 1, donc (P_0) est une base de $\operatorname{Ker} d$

$$\boxed{\operatorname{Ker} d = \operatorname{Vect}(P_0) = \operatorname{Vect}(1) = \mathbb{R}_0[X]}$$

Question 4.

La matrice M est triangulaire supérieure, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux.

M (donc d) admet une seule valeur propre, 0 : $\operatorname{Spec}(d) = \{0\}$

Le sous-espace propre de d associé à la valeur propre 0 est $\operatorname{Ker} d$; on a : $\dim \operatorname{Ker} d = 1 < \dim E$.

$$\boxed{\text{L'endomorphisme } d \text{ n'est pas diagonalisable}}$$

Remarque : autre méthode en raisonnant par l'absurde.
Si M est diagonalisable, il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, inversible et une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telles que $M = PDP^{-1}$.
Sur la diagonale de D se trouve la seule valeur propre de M, c'est-à-dire 0, donc $D = (0)_4$ (matrice nulle de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$). Il en résulte que $D = (0)_4$, donc $M = (0)_4$, ce qui est manifestement faux. On conclut que M n'est pas diagonalisable.

[Cette démonstration s'applique quand une matrice ne possède qu'une valeur propre. Elle conduit au résultat suivant : toute matrice appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ayant une seule valeur propre λ est diagonalisable si et seulement si cette matrice est égale à λI_n (où I_n est la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$). Cependant ce résultat est hors programme et doit être démontré à chaque fois que l'on en a besoin.]

Question 5.

a) Soit $P \in E$, décomposé sur la base canonique de E :

$$P = \delta.1 + \gamma X + \beta X^2 + \alpha X^3 \in E,$$

on a (voir **2°**))) :

$$d(P) = \gamma + 2\beta X + 3\alpha X^2,\ d^2(P) = d(d(P)) = 2\beta + 6\alpha X,$$
$$d^3(P) = d(d^2(P)) = 6\alpha \text{ et } d^4(P) = 0.$$

$\star$ Pour $k = 1$. On a vu que $\operatorname{Ker} d = \mathbb{R}_0[X]$.

$\star$ Pour $k = 2$. On a :

$$\begin{aligned} P \in \operatorname{Ker}(d^2) &\iff d^2(P) = 0 \iff 2\beta = 6\alpha = 0 \iff \beta = \alpha = 0 \\ &\iff P \in \operatorname{Vect}(1, X) \iff P \in \mathbb{R}_1[X]. \end{aligned}$$

$\star$ Pour $k = 3$. On a :

$$\begin{aligned} P \in \operatorname{Ker}(d^3) &\iff d^3(P) = 0 \iff 6\alpha = 0 \iff \alpha = 0 \\ &\iff P \in \operatorname{Vect}(1, X, X^2) \iff P \in \mathbb{R}_2[X]. \end{aligned}$$

Enfin $d^4(P) = 0$, donc $P \in \operatorname{Ker} d^4 \iff P \in E = \mathbb{R}_3[X]$.

En résumé :

$$\boxed{\begin{array}{c}\operatorname{Ker} d = \mathbb{R}_0[X], \operatorname{Ker}(d^2) = \mathbb{R}_1[X], \operatorname{Ker}(d^3) = \mathbb{R}_2[X], \operatorname{Ker}(d^4) = \mathbb{R}_3[X] \\ \forall\, k \in [\![1,4]\!], \dim(\operatorname{Ker} d^k) = \dim(\mathbb{R}_{k-1}[X]) = k\end{array}}$$

On peut remarquer que :

$$\operatorname{Ker}(d) \subset \operatorname{Ker}(d^2) \subset \operatorname{Ker}(d^3) \subset \operatorname{Ker}(d^4)$$

$\star$ Enfin, soit $P \in d(\operatorname{Ker}(d^k))$. Cela veut dire qu'il existe un polynôme $Q \in \operatorname{Ker} d^k$ tel que $P = d(Q)$. Alors :

$d^k(P) = d^k(d(Q)) = (d^k \circ d)(Q) = d^{k+1}(Q)$

(règle de calcul habituelle sur les exposants d'endomorphismes)

$= d^{1+k}(Q) = d(d^k(Q)) = d(0) = 0$

Donc : $P \in d(\operatorname{Ker} d^k) \implies d^k(P) = 0 \implies P \in \operatorname{Ker}(d^k)$ ce qui veut dire que :

$$\boxed{d(\operatorname{Ker} d^k) \subset \operatorname{Ker} d^k}$$

On peut remarquer que cette proposition veut dire que $\operatorname{Ker} d^k$ est stable par d.

b) Notons, pour $r \in [\![0,3]\!]$:

$$F_r = (d^k(P))_{0 \le k \le r} = (d^0(P), d(P), d^2(P), \dots, d^r(P))$$

avec la convention : $d^0 = Id_E$, donc $d^0(P) = P$.

Le polynôme P est de degré r, donc ce n'est pas le polynôme nul. On sait que lorsque l'on dérive un polynôme non nul, on obtient un polynôme dont le degré a diminué de un, sauf lorsque l'on dérive un polynôme constant, donc de degré 0, auquel cas l'on obtient alors le polynôme nul.

Ainsi si $\deg(P) = r$, on a $\deg(d(P)) = r-1$ et si $r-1 \neq 0$, $\deg(d^2(P)) = r-2$, etc.

Donc pour $k \in [\![0,r]\!]$, le degré de $d^k(P)$ vaut exactement $r-k$ qui est $\geqslant 0$, car on a dérivé k fois donc le degré a diminué de k. Le dernier terme $d^r(P)$ a pour degré $r - r = 0$. Le processus s'arrête alors puisque $d^{r+1}(P) = 0$.

Conclusion : $\forall\, k \in [\![0,r]\!], \deg(d^k(P)) = r-k \geqslant 0$.

La famille F_r est une famille de $r+1$ polynômes de E échelonnés en degrés :

$$\boxed{\text{pour } r \in [\![0,3]\!], (d^k(P))_{0 \le k \le r} \text{ est une famille libre.}}$$

Question 6.

a) $\dim F = 1$ signifie qu'il existe un polynôme $P \neq 0$ tel que $F = \operatorname{Vect}(P)$.
F est stable par d, donc $P \in F \implies d(P) \in F$: il existe donc $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $d(P) = \alpha P$.

Cela veut dire $P \in E_\alpha(d)$, où $E_\alpha(d)$ est le sous-espace propre de d associé à la valeur propre α. Or on a vu à la question **4°)** que d admettait une seule valeur propre $\alpha = 0$, avec $E_0(d) = \operatorname{Ker} d = \mathbb{R}_0[X]$.

Ainsi $P \in \operatorname{Ker} d$, donc $F = \operatorname{Vect}(P) \subset \operatorname{Ker} d$.

Or ces deux espaces sont de dimension 1, on en déduit qu'ils sont égaux. $F = \operatorname{Ker} d$.