1. La rigueur en mathématiques

Introduction

Ce chapitre introductif discute de la rigueur en mathématiques à travers quelques exemples puisés dans l'histoire.

Évidemment, il s'agit surtout de situer les problèmes et non de les traiter de manière exhaustive.

Certains sujets seront développés dans des chapitres ultérieurs.

Le problème de la rigueur est étroitement lié à la conception que l'on a des êtres mathématiques et des énoncés mathématiques. Par exemple :

1. Les êtres mathématiques :
   – en géométrie, qu'est-ce qu'un point, une droite ? que veut on dire lorsqu'on affirme que deux surfaces sont égales ? ...
   – en analyse, qu'est-ce qu'un nombre réel, une fonction continue, un infinitésimal ? ...
2. Les énoncés mathématiques :
   – qu'est ce qu'un énoncé qui a du sens ?
   – qu'est ce qu'un énoncé vrai ?
   – qu'est ce qu'un énoncé faux ?

C'est à la lumière de telles conceptions de base que l'on analyse une preuve et qu'on l'accepte ou non comme réellement convaincante. Inversement, l'analyse de certaines preuves peut éclairer des problèmes auparavant cachés et modifier nos conceptions de base.

Toutes ces conceptions ont évolué à travers l'histoire, et le dernier mot n'est pas dit, et ne sera sans doute jamais dit.

1.1 La géométrie élémentaire

Euclide

Le traité des Eléments d'Euclide a très longtemps été considéré comme le modèle de la rigueur dans les raisonnements mathématiques. C'est le premier texte connu où est mise en place et utilisée de manière systématique ce qu'il est convenu d'appeler la méthode axiomatique.

Une grande partie du traité est consacrée à ce que nous appelons aujourd'hui la géométrie élémentaire.

Euclide ne prend pas position sur la nature exacte des objets géométriques qu'il manipule : points, (segments de) droites, cercles, triangles, surfaces planes ou courbes, volumes... Implicitement il s'agit d'une idéalisation de notions communes, matérialisées par des figures bien concrètes. Quelques pseudo définitions sont données, qui ressemblent plus à des commentaires qu'à des précisions utiles au raisonnement. Certains des premiers raisonnements utilisent l'intuition du déplacement des objets solides pour justifier les cas d'égalité des triangles. Mais ensuite on a un discours qui n'utilise, au moins en apparence, que les axiomes et les cas d'égalité, et qui se développe selon les seules règles de la logique. La plupart des règles du raisonnement sont elles-mêmes implicites.

Un nombre important de propriétés remarquables sont démontrées, de manière apparemment irréprochables. D'autres auteurs de la même civilisation, tel Archimède, ont poursuivi la tradition.

Descartes

Descartes critique la géométrie grecque, non pour son absence de rigueur, mais pour son obscurité (il ne suffit pas de convaincre, il faut aussi expliquer). Pour l'absence d'une méthode générale qui serait susceptible d'attaquer tous les problèmes de géométrie de manière uniforme et efficace.

Il propose une telle méthode, le calcul algébrique sur les coordonnées. Tous les mystères doivent être résolus par de simples calculs mécaniques. C'est ce que l'on a appelé le *programme de Descartes*. Aujourd'hui ce programme est en partie réalisé.

D'une part les logiciels de géométrie dynamique sont capables de certifier sans se tromper un grand nombre de théorèmes de géométrie. Le théorème doit être d'un type particulier, quoiqu'assez général. Par exemple il ne doit pas faire intervenir des inégalités ($a < b$), mais seulement des égalités. Le logiciel, à qui on a soumis une certaine situation avec des éléments variables, fait alors le calcul suivant : il choisit pour chacun des éléments variables quelques valeurs numériques au hasard. Au lieu de faire un calcul algébrique avec des lettres, il fait un calcul purement numérique, approché. Si dans tous les cas choisis au hasard, le théorème est vérifié (à la précision du calcul près), le logiciel déclare le théorème vrai. On ne l'a jamais vu se tromper. C'est extrêmement troublant, car on peut difficilement croire qu'il s'agit d'une preuve rigoureuse. Pourtant tout mathématicien, professionnel de la rigueur pourtant, fait un jour ou l'autre une erreur de raisonnement, tandis que le logiciel, dont la méthode de preuve n'est pas rigoureuse, ne se trompe jamais.

D'autre part, Tarski a prouvé vers 1950 un résultat annoncé vers 1930 : si une question « purement algébrique » est posée concernant des nombres réels arbitraires, elle admet une réponse précise qui peut être calculée par un algorithme. Par exemple les théorèmes de la géométrie euclidienne usuelle rentrent tous dans ce cadre. Il faut ne considérer que des courbes, surfaces etc...définis par des systèmes d'équations et d'inégalités algébriques. L'algorithme proposé par Tarski est en fait impraticable, même par des ordinateurs très puissants. Mais d'autres algorithmes sont régulièrement proposés et le champ des problèmes de géométrie qui peuvent être traités de manière automatique par une machine s'élargit chaque année.

Lobatchevski

Pendant des siècles les géomètres ont tenté de se débarrasser du cinquième postulat dans la géométrie d'Euclide.

Ce postulat qui, sous une forme équivalente, affirme que par un point extérieur à une droite passe une et une seule parallèle à cette droite, a toujours été considéré comme le seul axiome « non naturel » dans le système d'Euclide : il a une tête de théorème et non d'axiome.

À force de chercher à tirer des conséquences de la négation du cinquième postulat (dans le but de démontrer par l'absurde qu'il résultait des autres axiomes) ils ont fini par construire une géométrie « non euclidienne » tout à fait cohérente, dans laquelle seul le cinquième postulat est changé, en son contraire. Par exemple Lambert en était arrivé à la conclusion que la géométrie non euclidienne devait être celle d'une sphère de rayon imaginaire $\sqrt{-R}$, où R dépend de l'unité de longueur choisie.

Le mérite principal revient cependant à Lobatchevski qui a décidé de braver une fois pour toutes l'interdit et de développer la géométrie non euclidienne de manière vraiment systématique.

On appelle *géométrie hyperbolique* la géométrie inventée par Lobatchevski.

Considérons une droite Δ et un point S extérieur à Δ, puis les sécantes (SM) à Δ où M est un point variable sur Δ. Une de ces sécantes est la droite (SH) orthogonale à Δ au point H. En admettant, comme notre intuition nous le dit, que la droite Δ peut être prolongée indéfiniment dans ses deux directions opposées, quelle est la position limite de (SM) lorsque M s'éloigne indéfiniment sur Δ dans l'une des deux directions ? Selon le cinquième postulat, les deux positions limites de la droite (SM) sont les

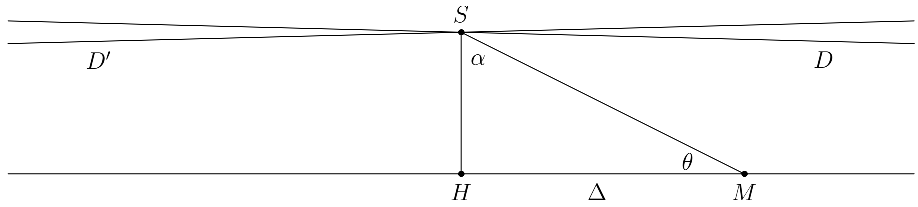

Figure 1.1 – Le contraire du postulat d'Euclide
D et D' sont les positions limites de (SM) lorsque M part
à l'infini sur Δ vers la droite ou vers la gauche

mêmes. Autrement dit, chacune de ces deux positions limites, qui sont symétriques par rapport à la droite (SH), forme un angle droit avec (SH) : lorsque θ tend vers l'angle nul, α tend vers un angle droit. Notons que l'angle droit en α est impossible pour une sécante (SM) car sinon, par raison de symétrie, la droite (SM) couperait aussi Δ en le point M' symétrique de M par rapport à H, et il passerait deux droites distinctes par les points M et M'.

Dans le cas où les positions limites D et D' de (SM) ne sont pas orthogonales à (SH) la valeur limite de l'angle α sera strictement inférieure à un droit et il y aura moyen d'insérer dans l'angle formé par les deux positions limites autant de droites que l'on veut ne coupant pas Δ et passant par S.

Ce que l'on réclame d'un plan hyperbolique ce sont les mêmes ingrédients de base que dans un plan euclidien : les points, les droites, les segments, les demi-droites, et ... la possibilité de *déplacer librement les figures géométriques*, ce qui correspond grosso modo aux deux premiers « cas d'égalités des triangles ».

Cette propriété de *libre mobilité* peut s'exprimer comme suit sans faire appel aux égalités de longueurs ou d'angles. On définit un « drapeau » comme constitué par une demi-droite et un des deux demi-plans qui bordent la droite correspondante. Alors le groupe des isométries doit opérer simplement transitivement sur les drapeaux : autrement dit, étant donnés deux drapeaux, il y a exactement une isométrie qui envoie l'un sur l'autre. De même, le groupe des déplacements (ou isométries directes) doit opérer simplement transitivement sur les demi-droites.

Lobatchevski pensait que l'on pouvait démontrer la cohérence de sa géométrie à partir de la cohérence des formules de trigonométrie du triangle qu'il avait établies dans le plan hyperbolique. Ces formules ressemblent beaucoup, avec de légères variations, aux formules de trigonométrie du triangle dans la géométrie sphérique.

Finalement la conviction que la géométrie hyperbolique était ni plus ni moins cohérente que la géométrie euclidienne se fit comme suit.

D'une part à l'intérieur de l'espace hyperbolique de dimension 3, Lobatchevski montra que certaines surfaces, les horosphères, que l'on pouvait voir comme des « limites de sphères » (on prend la sphère de centre S passant par un point A, tous deux situés sur une droite Δ et on fait s'éloigner S à l'infini dans une des deux directions sur Δ) avaient la même géométrie que le plan euclidien usuel. Ceci donnait évidemment une grande crédibilité à la géométrie hyperbolique, sans toutefois prouver sa cohérence.

D'autre part Beltrami et Poincaré proposèrent des constructions inverses : des modèles de géométrie hyperbolique dans l'espace euclidien.

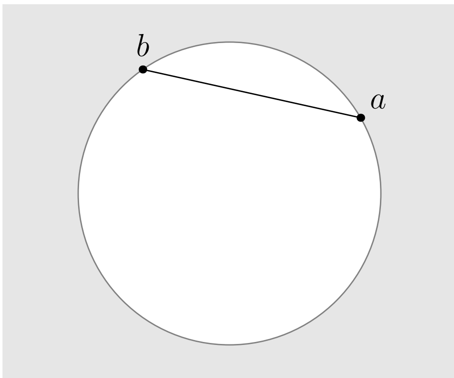

Figure 1.2 – Le modèle de Beltrami

Expliquons par exemple le modèle de Beltrami, dans lequel les droites du plan hyperbolique sont représentées par des segments ouverts de droite. On considère un disque ouvert D du plan euclidien et on note D_∞ le cercle qui borde ce disque ouvert. Les points du plan hyperbolique sont représentés par les points de D. Les droites du plan hyperbolique sont représentées par les segments ouverts de droites du type $\Delta =]a,b[$ avec a et b sur D_∞. Les points a et b peuvent être vus comme les deux points à l'infini qui définissent la droite Δ. Par ailleurs le cercle D_∞ a une structure naturelle de *droite projective réelle*. Il suffit de définir les transformations de D qui correspondent aux isométries du plan hyperbolique par la manière dont elles opèrent sur les droites, donc sur D_∞ : on prend alors les homographies de D_∞. On montre qu'elles induisent bien des transformations de D et le groupe obtenu possède bien la propriété attendue de déplacer librement les figures : il opère transitivement sur les demi-droites, et simplement transitivement sur les drapeaux. On montre également que la distance hyperbolique entre deux points m et n de la droite $\Delta =]a,b[$ est égale à $|\ln((ma.nb)/(mb.na))|$ (pour un choix convenable de l'unité de longueur).

Hilbert

Après le tremblement de terre constitué par la découverte de la géométrie hyperbolique, ce ne peut plus être la géométrie qui justifie les nombres réels, mais bien les nombres réels qui, à travers le calcul algébrique sur les coordonnées, justifient la géométrie (que ce soit celle d'Euclide ou de Lobatchevski).

Hilbert en profite pour faire une relecture critique d'Euclide et propose une axiomatique rénovée, qui s'appuie en bonne partie sur la théorie des ensembles alors en gestation, mais essaie d'éviter de faire appel directement aux nombres réels. Cela donne son fameux livre : *Fondements de la géométrie* (1900).

Tout d'abord il découvre de nombreux « axiomes non dits » dans la géométrie d'Euclide. Ce sont des propriétés des figures qui sont utilisées sans même que l'on s'en aperçoive sur la foi de l'intuition immédiate. Il s'agit en général d'axiomes liés à la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ et transcrits sous forme géométrique. Par exemple une droite qui coupe un coté d'un triangle doit forcément passer par le sommet opposé ou couper l'un des deux autres cotés (axiome de Pasch). Ou encore : une droite qui a un point à l'intérieur d'un cercle coupe le cercle en deux points.

Pour éviter de parler des nombres réels dans le système axiomatique, Hilbert introduit un axiome de complétion, impossible à formuler sans la théorie des ensembles. Cela se lit : il est impossible de rajouter des points au plan euclidien sans détruire la cohérence du système axiomatique. L'analogue pour les nombres réels serait : $\mathbb{R}$ est un corps ordonné archimédien maximal (i.e., qui ne possède pas de surcorps ordonné archimédien strictement plus gros). Un axiome de ce genre n'est pas « conforme » : au lieu d'imposer des propriétés aux objets de base (points, droites, segments) et à leurs relations de base (ici les relations d'incidence et de congruence[1]), il impose une propriété globale au « modèle ». Dans les théories formelles que Hilbert proposera plus tard, seuls les axiomes du premier type seront autorisés : c'est ce que l'on appelle les théories formelles du premier ordre.

L'axiome « non conforme » de Hilbert pourrait aussi se reformuler comme suit : tout ensemble de nombre réels positifs possède une borne inférieure. Un tel axiome est dit « du second ordre » car il s'énonce avec un « Pour toute partie de $\mathbb{R}$ ... ».

Toute preuve de cohérence que l'on proposerait pour la géométrie euclidienne à la Hilbert fournirait une preuve de cohérence pour « le système des nombres réels »

1. Le système de Hilbert utilise une relation primitive de « congruence » entre figures simples, dont la signification intuitive est qu'elles sont isométriques. Ainsi la distance entre deux points n'est pas une notion du système, car le système ne contient pas les nombres réels, mais l'égalité des longueurs AB et CD, appelée congruence, est une notion du système.

en tant que corps ordonné archimédien maximal. Un tel espoir paraît aujourd'hui démesuré, vu l'axiome du second ordre.

En bref, en pensant clore le débat une fois pour toutes, Hilbert l'a en fait précisé et déplacé.

Aujourd'hui

Si on veut comprendre la géométrie euclidienne sans faire appel à ce que nous avons appelé le système des nombres réels, il est possible d'utiliser une théorie formelle du premier ordre dans laquelle seules les propriétés purement algébriques de $\mathbb{R}$ sont sous-jacentes. Ces propriétés sont concentrées dans l'affirmation suivante : *les nombres réels, avec l'addition, la multiplication et la relation d'ordre, forment un corps ordonné « réel clos »*. La caractère réel clos signifie qu'une fonction polynôme qui change de signe aux extrémités d'un intervalle doit s'annuler au moins une fois sur l'intervalle. Cette propriété se formule comme une propriété des objets de base (nombres réels et opérations algébriques élémentaires)

NB : Ne considérer que les propriétés purement algébriques des nombres réels revient à ne considérer dans le plan que les courbes algébriques et à exclure les courbes transcendantes (la cycloïde par exemple). C'est dans ce cadre que Tarski a montré que tout problème géométrique posé en termes purement algébriques admet une solution algorithmique.

Les « Fondements de la géométrie » de Hilbert revus à la Tarski correspondent à un système axiomatique dont on peut prouver la cohérence avec des méthodes « élémentaires ». Du point de vue de la cohérence, c'est donc très nettement préférable aux « Fondements de la géométrie » à la Hilbert.

La contrepartie, naturellement, est que l'on ne prouve rien quant à la cohérence du système des nombres réels lui-même, pourtant censé être le vrai système numérique implicite dans la géométrie euclidienne.

Le système des nombres réels est autrement plus compliqué que celui des entiers naturels. Comme on sait qu'en un certain sens on n'aura jamais dit le dernier mot au sujet du système des entiers naturels, on doit être encore plus modeste avec le système des nombres réels.

Exercices

Les deux exercices qui suivent sont énoncés dans un style très intuitif et informel et demandent une discussion du même type.

Exercice 1.1.1 *(libre mobilité)*
Décrire les principales isométries (translation, demi-tour, rotation, symétrie par rapport à une droite), au moyen de la propriété de libre mobilité.
Exemple. Le demi-tour autour du point A est l'isométrie directe qui envoie une demi-droite d'origine A sur la demi-droite opposée.

Exercice 1.1.2 *(les deux premiers cas d'égalité des triangles)* Le premier cas est le suivant : si les deux triangles ABC et $A'B'C'$ ont un angle égal ($\widehat{A} = \widehat{A'}$) compris entre des cotés deux à deux égaux ($AB = A'B'$ et $AC = A'C'$), alors ils sont égaux.

Dans les trois occurrences le mot « égalité » doit être compris comme suit : « sont égales deux figures qui peuvent être emmenées à se superposer exactement l'une sur l'autre au moyen d'un déplacement ». Ainsi la notion de segments égaux est antérieure à la notion de d'égalité des longueurs comme mesures.
Le deuxième cas est le suivant : si les deux triangles ABC et $A'B'C'$ ont un coté égal ($AB = A'B'$) compris entre des angles deux à deux égaux ($\widehat{A} = \widehat{A'}$ et $\widehat{B} = \widehat{B'}$), ils sont égaux.
Dans quelle mesure ces cas d'égalité peuvent-ils être démontrés au moyen de la propriété de libre mobilité ?
Dans quelle mesure impliquent-ils la propriété de libre mobilité ?
NB : voir chez Euclide les propositions IV et VIII.

1.2 La rigueur dans $\mathbb{N}$

La rigueur dans le raisonnement avec les entiers naturels semble ce qu'il y a de plus facile à maîtriser, car les entiers naturels sont les objets mathématiques les plus simples.

Un entier naturel est codé par un mot écrit sur l'alphabet $0, 1, 2, \ldots, 9$ et la possibilité de raisonner avec des objets si élémentaires est directement reliée à la capacité de maîtriser une langue. Parler une langue en se faisant comprendre semble au moins aussi compliqué que faire des calculs sans se tromper. Abstraire la notion de nombre entier à partir de ses réalisations concrètes (que sont les opérations de comptage) relève du même type d'abstraction que celui à l'œuvre dans le language lorsqu'un même mot, « table » par exemple, est utilisé pour désigner des objets très différents les uns des autres. Et la combinatoire des mots à l'œuvre dans la construction des phrases est certainement aussi complexe que la combinatoire des chiffres dans une opération élémentaire du style $352 + 567 = 919$.

C'est pourquoi on considère souvent que les entiers naturels, en tant qu'objets de base, ne peuvent pas être définis à partir d'objets plus simples[2], mais seulement être commentés.

L'axiomatique de Peano

On peut cependant se poser la question d'une description précise des règles de base qui doivent être appliquées dans un raisonnement rigoureux avec les entiers naturels. Et ce n'est évidemment pas un hasard si c'est au $19^{\text{ème}}$ siècle, quand la géométrie hyperbolique a fait douter des fondements, quand on s'est aperçu de la difficulté à fonder le calcul différentiel sur des bases solides qu'est apparu ce besoin. Peano a proposé une axiomatique pour cela. Elle est basée sur les concepts (non définis) de nombre (entier naturel) et de successeur.

2. Il est vrai que dans la théorie des ensembles, on a fini par s'écarter de ce point de vue, (qui était le point de vue initial) selon lequel les entiers sont des objets qui forment un ensemble mais ne sont pas eux-mêmes des ensembles. On trouve fréquemment aujourd'hui les entiers définis comme des ensembles, en posant $0 = \emptyset$, puis de proche en proche $n + 1 = \{n\} \cup n$. Mais cela n'éclaire en rien la question des entiers naturels, car cela revient à définir le simple par le compliqué.

L'idée est de dire sous une forme axiomatique que les entiers sont engendrés par 0 et par l'opération successeur, sans jamais boucler. En français, cela donne :

1. 0 est un nombre.
2. Le successeur d'un nombre est un nombre.
3. Deux nombres qui ont même successeur sont égaux.
4. 0 n'est le successeur d'aucun nombre.
5. Si une propriété concernant un nombre nombre arbitraire est vraie pour 0, et si elle est vraie pour le successeur de n dès qu'elle est vraie pour n alors elle est vraie pour tous les nombres. (axiome de récurrence)

Notez que l'on obtient facilement par récurrence la propriété : tout nombre différent de 0 est le successeur d'un nombre.

Maintenant, est-ce que les propriétés de base de l'addition et de la multiplication : commutativité, associativité, distributivité doivent être prouvées par récurrence (en suivant l'axiomatique de Peano) ? Dans ce cadre on considérera que l'addition et la multiplication sont définies par récurrence au moyen des axiomes suivants, dans lesquels m' représente le successeur de m (on peut noter $s(m)$ si l'on préfère).

1. Addition
   (a) $m + 0 = m$
   (b) $m + (n') = (m + n)'$
2. Multiplication
   (a) $m \cdot 0 = 0$
   (b) $m \cdot (n') = (m \cdot n) + m$

Vous pouvez vous amuser à essayer de prouver les propriétés élémentaires de l'addition et de la multiplication par récurrence. C'était même au programme des classes de terminales dans les années 1970.

Des preuves plus intuitives

Mais est-ce que les preuves plus traditionnelles par des arguments de comptage de collections finies sont vraiment moins rigoureuses ? Dans cet autre cadre, plus naturel puisque les nombres ont d'abord été inventés pour compter, pas pour vérifier l'axiomatique de Peano, l'addition $m + n$ est définie par la juxtaposition de deux collections disjointes : m poires et n pommes font $m + n$ fruits. Démontrer $m + n = n + m$ ne semble même plus nécessaire, tant cela résulte de la définition de l'addition.

$$\{\underbrace{\bullet, \dots, \bullet}_{m}\} \cup \{\underbrace{\times, \dots\dots, \times}_{n}\} = \{\underbrace{\bullet, \dots, \bullet, \times, \dots\dots, \times}_{m+n}\}$$

Même chose concernant l'associativité de l'addition. La multiplication est définie à partir de la notion de couples. S'il y a m poires et n pommes, il y a $m \cdot n$ couples formés d'une pomme dans la première collection et d'une poire dans la seconde. Sous une forme plus visuelle on range les couples dans un tableau rectangle avec m lignes et n colonnes. On obtient, au choix m fois n cases, ou n fois m cases.