

Table des matières

I	« Les fondamentaux »	
	Récapitulatifs approfondis de 1^{re} année	1
1	Structures algébriques et relations binaires	3
1.1	Exposés préliminaires	3
1.1.1	Utilisations des structures algébriques	3
1.1.2	Relations binaires, loi de composition	4
1.1.3	Les entiers naturels et la récurrence	6
1.1.4	Ecriture d'un entier dans une base de numération b	8
1.1.5	Des entiers aux complexes	8
1.2	Définitions des structures fondamentales	9
1.2.1	Groupes, anneaux, corps	9
1.2.2	Espaces vectoriels, algèbres	11
1.3	A propos des sous-corps de \mathbb{R} et de \mathbb{C}	12
2	Les nombres complexes	15
2.1	Le corps des complexes	15
2.1.1	Une algèbre commutative	15
2.1.2	Conjugaison, module et argument	15
2.1.3	Racines carrées et équations du second degré	16
2.1.4	Racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité	17
2.2	Développer une vision géométrique	19
2.2.1	Encadrement	19
2.2.2	Racine carrée	19
2.3	Précisions à propos de l'argument	20
2.4	Nombres complexes et géométrie plane	21
2.4.1	Passerelles entre nombres complexes et géométrie	22
2.4.2	Configurations particulières	23
2.4.3	Quelques transformations	24
2.4.4	Similitudes planes et nombres complexes	25
2.5	En lien avec d'autres chapitres	27
2.5.1	Exponentielle d'un complexe	27
2.5.2	Représentation matricielle des complexes	28
2.5.3	Le théorème de relèvement C^1 (Hors-programme MP)	29
2.5.4	Les quaternions (Hors programme MP)	29

3	Etudes sur les groupes	31
3.1	Généralités sur les groupes	31
3.1.1	Groupe produit	31
3.1.2	Sous-groupe engendré par une partie	31
3.1.3	Morphisme et isomorphisme de groupes	32
3.1.4	Groupes monogènes, groupes cycliques	34
3.1.5	Ordre d'un élément dans un groupe	37
3.2	Le groupe symétrique	38
3.2.1	Permutations	38
3.2.2	Cycles	39
3.2.3	Générateurs du groupe symétrique	39
3.2.4	Signature d'une permutation	41
3.3	Exemples de groupes et de morphismes	44
3.3.1	Les translations sont des bijections	44
3.3.2	Sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$	44
3.3.3	Groupes de matrices	45
3.3.4	Exemple d'un groupe d'éléments involutifs	47
4	Anneaux et arithmétique de \mathbb{Z}	49
4.1	Résultats fondamentaux dans les anneaux	49
4.1.1	Calculs dans un anneau	49
4.1.2	Prototypes	49
4.2	Morphisme algébrique	50
4.2.1	Morphisme (ou homomorphisme)	50
4.2.2	Caractéristique d'un anneau	52
4.2.3	Noyau et image d'un morphisme d'anneaux commutatifs	52
4.2.4	Produit fini d'anneaux	52
4.2.5	Divisibilité dans un anneau intègre	53
4.3	Résultats classiques d'arithmétique de \mathbb{Z}	53
4.3.1	Considérations initiales d'arithmétique dans \mathbb{Z}	53
4.3.2	Idéaux de $(\mathbb{Z}, +, \times)$	57
4.3.3	Éléments inversibles de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$	57
4.3.4	Théorème de <i>Fermat</i>	60
4.3.5	Théorème de <i>Wilson</i>	60
4.3.6	Théorème des restes chinois	61
4.3.7	Indicatrice d' <i>Euler</i>	64
5	Polynômes	67
5.1	Rappels de première année	67
5.1.1	Division et divisibilité : résultats de 1 ^{ère} année	68
5.1.2	Relations coefficients-racines	70
5.2	Fractions rationnelles	71
5.2.1	Décomposition en éléments simples dans \mathbb{R} ou \mathbb{C}	71
5.2.2	Techniques de calcul	72
5.3	Compléments sur les polynômes	74
5.3.1	Les polynômes de <i>Lagrange</i>	74
5.3.2	Les idéaux de $\mathbb{K}[X]$	75
5.3.3	P.P.C.M. et P.G.C.D. de p polynômes	76
5.3.4	Hors programme : théorème de <i>Lucas</i> et calcul de $\zeta(2)$	80
5.4	Formulaire initial d'Algèbre	82

6	Fondements de l'algèbre linéaire	83
6.1	Introduction, base, dimension	83
6.1.1	Utilisation de l'algèbre linéaire	83
6.1.2	Famille génératrice, liée ou libre	84
6.1.3	Dimension finie	86
6.2	Sous-espaces vectoriels et applications linéaires	87
6.2.1	Somme de sous-espaces vectoriels	87
6.2.2	Applications linéaires : morphismes d'espaces vectoriels	89
6.2.3	Projecteurs, involutions et nilpotents	92
6.3	Les matrices	96
6.3.1	Premières opérations	96
6.3.2	Matrices particulières	97
6.3.3	Matrices et applications linéaires	98
6.3.4	Trace et rang d'une matrice	100
6.3.5	Rang et matrices extraites	102
6.3.6	Matrices de rang 1	103
6.3.7	Calcul matriciel par blocs	104
6.3.8	Méthode de <i>Gauss</i>	104
6.4	Point de vue vectoriel, point de vue matriciel	106
6.5	Les polynômes de Lagrange	107
7	Formes multilinéaires, déterminants	109
7.1	Formes multilinéaires	109
7.1.1	Application n -linéaire	109
7.1.2	Développements en dimension finie	111
7.2	Les déterminants	111
7.2.1	Déterminant de n vecteurs relativement à une base	111
7.2.2	Aire, volume et déterminant	113
7.2.3	Déterminant d'un endomorphisme	116
7.2.4	Déterminant d'une matrice carrée	118
7.2.5	Orientation d'un espace vectoriel réel	118
7.2.6	Calcul des déterminants	119
7.2.7	Déterminant et rang d'une matrice	122
7.2.8	Remarques algébriques et topologiques	122
7.2.9	Déterminant de <i>Vandermonde</i>	123
7.2.10	Polynôme caractéristique d'une matrice	123
7.3	Exercices	124
8	Systèmes linéaires et dualité	127
8.1	Systèmes linéaires de n équations à p inconnues	127
8.1.1	Décomposition d'un vecteur dans un système de vecteurs	127
8.1.2	Antécédent d'un vecteur par une application linéaire	128
8.1.3	Intersection d'hyperplans affines	129
8.1.4	Système linéaire et interprétations	129
8.1.5	Cas de <i>Cramer</i>	130
8.1.6	Cas général	131
8.1.7	Résolution par calcul	131
8.2	Système d'équations, dualité	132
8.2.1	Exemple d'un plan de \mathbb{R}^4	132
8.2.2	Forme linéaire et hyperplan	133

8.2.3	Base duale en dimension finie	135
8.3	Exemples de résolutions de systèmes	137
8.4	Exemples de bases duales et anté-duales	140
9	Formes bilinéaires et produits scalaires	143
9.1	Formes bilinéaires symétriques	143
9.1.1	Symétrique et non dégénérée	143
9.1.2	En dimension finie	143
9.2	Forme quadratique associée	146
9.2.1	Forme polaire	146
9.2.2	Forme positive et définie positive	146
9.3	L'inégalité fondamentale de <i>Cauchy-Schwarz</i>	148
9.4	Produit scalaire sur E	149
9.4.1	Définitions : Préhilbertien et Euclidien	149
9.4.2	Norme associée à un produit scalaire	150
9.4.3	Identité du parallélogramme	150
9.4.4	Ecart angulaire	151
9.5	Etude de la suite des polynômes de <i>Tchebychev</i>	151
10	Suites numériques, topologie de \mathbb{R}	153
10.1	Construction de \mathbb{R}	153
10.1.1	Un corps totalement ordonné	153
10.1.2	Le corps des réels	154
10.2	Convergence d'une suite de réels	154
10.2.1	Définition	154
10.2.2	Convergence	155
10.2.3	Suite extraite	155
10.3	Quelques premiers outils	156
10.3.1	Une condition nécessaire de convergence	156
10.3.2	Opérations sur les suites	156
10.3.3	Théorème d'encadrement	157
10.3.4	Suites arithmétiques	157
10.3.5	Suites géométriques	158
10.4	Topologie de \mathbb{R}	158
10.4.1	Sous-ensembles remarquables	158
10.4.2	Topologie séquentielle de \mathbb{R}	159
10.4.3	Comparaisons	162
10.5	Compléments techniques	163
10.5.1	Théorème de <i>Césaro</i>	163
10.5.2	Utilisation de développements asymptotiques	164
10.6	Suites de complexes	165
10.6.1	Séparer parties réelles et imaginaires	165
10.6.2	Utiliser module et argument	165
11	Suites numériques récurrentes	167
11.1	Approximations et systèmes dynamiques	167
11.1.1	Comportement d'une suite récurrente	167
11.1.2	Un premier exemple : les suites arithmético-géométriques	168
11.2	Suites récurrentes réelles, avec $u_{n+1} = f(u_n)$	169
11.2.1	Généralités	169

11.2.2	Deux situations favorables	171
11.2.3	Des études plus délicates : utilisation de la compacité	173
11.3	Réurrences linéaires d'ordre $p \geq 2$	173
11.3.1	Réurrence linéaire d'ordre 2	173
11.3.2	Réurrence linéaire d'ordre $p \geq 2$	175
11.4	Convergence hypergéométrique	176
11.5	Suites homographiques	178
11.6	Suites récurrentes complexes, avec $u_{n+1} = f(u_n)$	179
11.6.1	Un exemple : approximation d'une racine carrée	179
11.6.2	Théorème du point fixe	180
11.6.3	Quelques résultats sur les ensembles de Julia	181
12	Les fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R}	183
12.1	Quelques généralités	183
12.1.1	Analyse fonctionnelle	183
12.1.2	Parité, périodicité	183
12.2	Autour de la continuité	184
12.2.1	Valeur intermédiaire	184
12.2.2	Uniforme continuité	186
12.2.3	Fonction monotone	187
12.2.4	Fonction réciproque	187
12.3	Autour de la dérivabilité	188
12.3.1	Fonction dérivable ou différentiable en a	188
12.3.2	Dérivation des fonctions composées	188
12.3.3	Dérivée d'une fonction réciproque	189
12.3.4	Formule de <i>Leibniz</i>	190
12.4	Théorèmes de <i>Rolle</i> et des accroissements finis	190
12.4.1	Théorème de <i>Rolle</i>	190
12.4.2	Théorème des accroissements finis	191
12.4.3	Limite de la dérivée	193
12.4.4	Variations des fonctions	194
12.5	Intégration sur un segment	195
12.5.1	Intégrale d'une fonction en escalier	195
12.5.2	Construction suivant <i>Riemann</i>	196
12.5.3	Propriétés usuelles	197
12.5.4	Sommes de <i>Riemann</i> de f continue sur un segment	199
12.5.5	Primitive	203
12.5.6	Intégrale fonction de sa borne supérieure	204
12.5.7	Théorème fondamental de l'analyse	205
12.5.8	Intégration par parties	205
12.5.9	Changement de variable	207
12.6	Diverses applications	207
12.6.1	Dérivées et intégrales	207
12.6.2	Irrationnalité de π	210
12.6.3	Calcul de $\zeta(2)$ et intégrale de <i>Dirichlet</i>	211

13 Formules de Taylor et développements limités	213
13.1 Comparaisons des fonctions à valeurs réelles	213
13.1.1 Domination, négligeabilité et équivalence	213
13.1.2 Notations utiles pour les développements limités	215
13.2 Polynôme et formules de <i>Taylor</i>	215
13.2.1 Polynôme de <i>Taylor</i> de f	215
13.2.2 Formules de <i>Taylor</i>	216
13.3 Développements limités	218
13.3.1 Existence et unicité	218
13.3.2 Opérations sur les D.L. des fonctions à valeurs réelles	220
13.3.3 Primitivation des D.L.	221
13.3.4 Remarques fondamentales	222
13.3.5 Clarté et précision	222
14 Fonctions usuelles	225
14.1 Les fonctions logarithme et exponentielle	225
14.1.1 Fonction logarithme népérien	225
14.1.2 Fonction exponentielle de base e	226
14.1.3 Logarithme et exponentielle de base a	227
14.2 Les fonctions puissances	227
14.2.1 Les puissances entières et leurs réciproques	227
14.2.2 Cas général	227
14.3 Caractérisations fonctionnelles	228
14.3.1 Caractérisation des applications linéaires	228
14.3.2 D'autres caractérisations fonctionnelles	229
14.4 Les fonctions trigonométriques	230
14.4.1 Fonctions sinus, cosinus et leurs réciproques	230
14.4.2 Graphes	230
14.4.3 Fonctions tangente et arctangente	231
14.5 Les fonctions hyperboliques	231
14.5.1 Fonctions sh, ch et th	231
14.5.2 Fonctions hyperboliques réciproques	232
14.6 Quelques exemples de référence	233
14.6.1 Fonction dérivable, mais non C^1	233
14.6.2 Asymptote horizontale ou tangente horizontale	234
14.6.3 Exemples à propos des fonctions usuelles	235
15 Méthodes de calcul d'intégrales et de primitives	239
15.1 Rappels de la théorie pour le calcul	239
15.1.1 Calcul à l'aide d'une primitive	239
15.1.2 Intégration par parties	240
15.1.3 Changement de variable	240
15.2 Les fractions rationnelles	240
15.2.1 Intégration d'un élément simple de première espèce	240
15.2.2 Intégration d'un élément simple de deuxième espèce	241
15.3 Fractions rationnelles en sinus et cosinus	242
15.3.1 Polynôme en sinus et cosinus	243
15.3.2 Fraction rationnelle en sinus et cosinus	243
15.3.3 Tests de <i>Bioche</i>	243
15.4 Fractions rationnelles en exp, sh ou ch	244

15.5	Intégrales de f faisant intervenir un radical	244
15.5.1	Intégrales du type $\int_p^q R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$	244
15.5.2	Intégrales du type $\int_p^q R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$	245
15.6	Tableau récapitulatif	246
15.7	Exemples de calcul de diverses intégrales	246
15.8	Quelques développements classiques	250
15.8.1	Intégrales de <i>Wallis</i>	250
15.8.2	Premier théorème de la moyenne	251
15.8.3	Comportement des sommes de <i>Riemann</i>	252
15.8.4	Formule des trapèzes	253
16	Equations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1 et 2	257
16.1	Etude des EDL scalaires du 1 ^{er} ordre	257
16.1.1	Solutions d'une équation différentielle	257
16.1.2	Equation normalisée	257
16.1.3	Rappels de résultats utiles	258
16.1.4	Résolution d'une équation sous forme normalisée	259
16.1.5	Plan d'étude d'une équation différentielle linéaire	261
16.2	Exemples de résolutions d'EDL1	261
16.2.1	Résolution de l'équation $(F) : t \cdot x' - 2 \cdot x + t = 0$	261
16.2.2	Résolution de l'équation $(F) : t^2 \cdot x' + (1 - 2t) \cdot x - t^2 = 0$	262
16.2.3	Résolution de l'équation $(F) : \cos(t) \cdot x' + \sin(t) \cdot x - 1 = 0$	263
16.3	Développements hors programme	264
16.3.1	Changement de fonction inconnue	264
16.3.2	Equations de <i>Bernoulli</i> et <i>Riccati</i>	265
16.4	Equations linéaires scalaires d'ordre 2	266
16.4.1	Introduction aux équations d'ordre 2	266
16.4.2	Equations à coefficients constants	267
II	« Au cœur du programme »	
	L'essentiel en 2^e année	269
17	Dénombrément et dénombrabilité	271
17.1	Dénombrément	271
17.1.1	Introduction	271
17.1.2	Nombre d'applications	271
17.1.3	Nombre de sous-ensembles	272
17.1.4	Propriétés usuelles	273
17.1.5	Applications classiques	275
17.1.6	Récapitulatif des dénombrements	276
17.1.7	Exemples	276
17.2	Développement décimal d'un réel	278
17.2.1	Une suite géométrique	278
17.2.2	Existence et unicité	278
17.3	Ensembles dénombrables, au plus dénombrables	280
17.3.1	Rappels sur les ensembles finis	280
17.3.2	Dénombrabilité	281

17.3.3	Ensembles \mathbb{Z} et \mathbb{N}^2	282
17.3.4	Opérations	283
17.3.5	Ensembles \mathbb{Q} et \mathbb{R}	283
17.3.6	Quelques développements	284
18	Espaces, distances et continuité	285
18.1	Mise en place des notions fondamentales	285
18.1.1	Le problème de Guillaume Tell	285
18.1.2	Normes et distances	286
18.1.3	Boules, voisinages et ouverts	287
18.1.4	Norme associée à un produit scalaire	290
18.1.5	Suites, convergence, valeurs d'adhérence	291
18.1.6	Densité	293
18.1.7	Distance à un sous-ensemble	293
18.1.8	Normes équivalentes	294
18.1.9	Topologie induite, ouverts relatifs à A	295
18.2	Compacité, partie compacte	296
18.3	Limites et fonctions continues	297
18.3.1	Limite en un point, en restant dans une partie	297
18.3.2	Caractérisation séquentielle de limite	298
18.3.3	Continuité en un point, sur un ensemble	298
18.3.4	Opérations algébriques et continuité	300
18.4	Fonctions lipschitziennes, fonctions uniformément continues	302
18.4.1	Fonctions lipschitziennes	302
18.4.2	Fonctions uniformément continues	303
18.4.3	Fonctions continues sur un compact	303
18.5	Espace produit de p espaces vectoriels normés	304
18.5.1	Norme produit	304
18.5.2	Suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans un espace produit $E = \prod_{1 \leq k \leq p} E_k$	304
18.5.3	Produit de compacts	305
18.5.4	Théorème de <i>Bolzano-Weierstrass</i>	305
18.6	Espaces de dimension finie	306
18.6.1	Equivalence des normes	306
18.6.2	Compacts d'un espace vectoriel normé de dimension finie	307
18.6.3	Continuité pour F de dimension finie	307
18.7	Segment, étoilé, convexe, connexe par arcs	308
18.7.1	Segments dans un espace vectoriel	308
18.7.2	Arc et connexe par arcs	309
18.7.3	Fonction continue sur un connexe par arcs	310
18.8	Quelques exemples développés	311
18.8.1	Normes	311
18.8.2	Ouverts, fermés, compacts	313
18.8.3	Normes N_p sur \mathbb{K}^n	314
18.8.4	Topologie dans les ensembles de matrices	315

19 Opérations algébriques et continuité	317
19.1 Continuité des applications linéaires	317
19.1.1 Continuité et caractère lipschitzien, pour f linéaire	317
19.1.2 Pour E de dimension finie	318
19.1.3 La meilleure constante de <i>Lipschitz</i> possible	319
19.1.4 Hors programme : norme subordonnée	320
19.2 Continuité des applications multilinéaires	321
19.2.1 Cas d'une application bilinéaire	321
19.2.2 Cas d'une application multilinéaire	321
19.3 Continuité des opérations algébriques	322
20 Barycentres et fonctions convexes	323
20.1 Notions affines dans un espace vectoriel	323
20.1.1 Sous-espace affine d'un espace vectoriel	323
20.1.2 Parallélisme, intersection et inclusion	324
20.1.3 Repère affine cartésien	324
20.1.4 Changement de repère, représentation matricielle	325
20.2 Barycentres	325
20.2.1 Définition	325
20.2.2 Caractérisations des notions affines	325
20.2.3 Associativité des barycentres	326
20.2.4 Convexe et enveloppe convexe	328
20.3 Fonction convexe	328
20.3.1 Fonction convexe, fonction concave	328
20.3.2 Conséquences géométriques	329
20.3.3 Inégalité de convexité	330
20.3.4 Convexité des fonctions dérivables	331
20.3.5 Des inégalités conséquences de la convexité	331
21 Fonctions vectorielles	333
21.1 Dérivation	333
21.1.1 Vecteur dérivé	333
21.1.2 Fonctions de classe C^k sur I , $k \in \mathbb{N}$	337
21.1.3 Fonctions de classe C^k par morceaux	338
21.2 Intégration sur un segment	338
21.2.1 Définition de l'intégrale et premières propriétés	338
21.2.2 Sommes de <i>Riemann</i>	341
21.3 Dérivation et intégration	341
21.3.1 Primitives	341
21.3.2 Relations entre primitives	343
21.3.3 Prolongement de la dérivée	345
21.3.4 Formules de <i>Taylor</i>	346
21.4 Comparaisons des fonctions vectorielles	347
21.4.1 Domination, négligeabilité et équivalence	347
21.4.2 Développements limités	348
21.4.3 Dérivation du déterminant (Hors programme MP)	349

22 Arcs paramétrés	351
22.1 Arc paramétré, courbe	351
22.1.1 Introduction	351
22.1.2 Arc paramétré	351
22.2 Tangente en un point	353
22.2.1 Droite tangente	353
22.2.2 En un point à paramètre régulier	354
22.3 Courbes planes : $n = 2$	354
22.3.1 Tangente	354
22.3.2 Normale	355
22.4 Exemples classiques d'arcs plans	355
22.5 D'autres exemples	360
23 Compléments d'algèbre linéaire pour la réduction	361
23.1 Les enjeux de la réduction des endomorphismes	361
23.2 Sous-espaces propres d'un endomorphisme	363
23.2.1 Définitions des éléments propres	363
23.2.2 Somme directe des sous-espaces propres	365
23.2.3 Chercher des vecteurs propres	366
23.2.4 Pour une matrice carrée	367
23.3 Stabilité et endomorphisme induit	368
23.3.1 Endomorphisme induit sur un sous-espace stable	368
23.3.2 Commutant d'un endomorphisme	369
23.3.3 Caractérisation matricielle de la stabilité	369
23.3.4 Recherche des droites et des hyperplans stables par f	370
23.3.5 Sous-espaces stables dans un \mathbb{R} -espace vectoriel	371
23.4 Polynômes d'un endomorphisme, d'une matrice	372
23.4.1 Introduction	372
23.4.2 Les algèbres $\mathbb{K}[f]$ et $\mathbb{K}[M]$	372
23.4.3 Effet sur les valeurs propres	373
23.5 Polynômes annulateurs, polynôme minimal	374
23.5.1 L'idéal des polynômes annulateurs d'un endomorphisme	374
23.5.2 L'idéal des polynômes annulateurs d'une matrice	376
23.5.3 Polynôme annulateur et valeurs propres	377
23.6 Théorème de décomposition des noyaux	379
23.6.1 Rappels sur les projecteurs et symétries	379
23.6.2 En somme directe	380
23.6.3 Applications	380
23.7 Quelques exemples	381
24 Réduction des matrices et des endomorphismes	383
24.1 Endomorphismes et matrices diagonalisables	383
24.2 Endomorphismes et matrices trigonalisables	384
24.3 Polynôme caractéristique	385
24.3.1 Définitions	385
24.3.2 Calcul du polynôme caractéristique	385
24.3.3 Ordre de multiplicité d'une valeur propre	386
24.3.4 Polynôme caractéristique et endomorphisme induit	387
24.4 Théorème de <i>Cayley-Hamilton</i>	388
24.5 Les critères usuels de diagonalisabilité	390

24.5.1	Diagonalisation des endomorphismes	390
24.5.2	Endomorphisme induit par f , polynôme en f	392
24.5.3	Diagonalisation des matrices	393
24.6	Les critères usuels de trigonalisabilité	395
24.6.1	Trigonalisation des endomorphismes	395
24.6.2	Trigonalisation des matrices	396
24.7	Endomorphismes et matrices nilpotents	397
24.7.1	Généralités	397
24.7.2	Trigonalisation spécifique d'un endomorphisme nilpotent	398
24.8	Endomorphismes à polynôme annulateur scindé	398
24.8.1	Polynôme annulateur scindé	398
24.8.2	Sous-espaces caractéristiques	399
24.8.3	Décomposition de E en sous-espaces stables par u	399
25	Prolongements sur la réduction	403
25.1	Décomposition spectrale, cas diagonalisable	403
25.1.1	Point de vue matriciel	403
25.1.2	Point de vue de l'endomorphisme	404
25.2	Puissances d'une matrice	404
25.2.1	Evolution d'une population	404
25.2.2	Divers procédés de calcul de A^m	405
25.2.3	Applications à un exemple	406
25.3	Diagonalisation simultanée	406
25.4	Polynômes caractéristiques de AB et BA	408
26	Espaces préhilbertiens	409
26.1	Structure préhilbertienne	409
26.1.1	Produit scalaire et espace préhilbertien	409
26.1.2	Orthogonalité et normalisation	413
26.2	Bases orthonormales : existence et construction	413
26.2.1	De l'utilité des bases orthonormales	413
26.2.2	Le procédé de <i>Gram-Schmidt</i>	414
26.2.3	Deux réalisations du procédé de <i>Gram-Schmidt</i>	415
26.2.4	Applications du théorème de <i>Gram-Schmidt</i>	416
26.2.5	Point d'attention : la dimension finie	418
26.3	Matrices orthogonales	419
26.3.1	Propriété matricielle	419
26.3.2	Groupe orthogonal	419
26.3.3	Produit mixte, produit vectoriel	420
26.4	Le théorème de projection orthogonale	421
26.4.1	Orthogonal par rapport à ϕ d'un sous-ensemble de E	421
26.4.2	Existence et unicité de la projection orthogonale	422
26.4.3	Conséquences structurelles	422
26.4.4	Applications	423
26.5	Suite orthonormale totale de vecteurs	428
26.6	Représentation d'une forme linéaire, gradient	429
26.7	Endomorphismes remarquables d'un euclidien	429
26.8	Détermination d'un minimum par projection	430

27	Endomorphismes symétriques d'un espace euclidien	431
27.1	Endomorphismes symétriques	431
27.1.1	Définition générale	431
27.1.2	Caractérisation matricielle	432
27.2	Les projecteurs orthogonaux	433
27.2.1	Ils sont symétriques	433
27.2.2	Matriciellement	433
27.3	Réduction des endomorphismes symétriques	434
27.3.1	Spectre d'une matrice symétrique et réelle	434
27.3.2	Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable	435
27.3.3	Diagonalisabilité	435
27.3.4	Réduction d'une matrice symétrique et réelle	436
27.4	Applications, exemples et exercices	437
27.4.1	Racine carrée d'un endomorphisme symétrique positif	437
27.4.2	Exercices plus délicats	437
28	Isométries vectorielles d'un espace euclidien	439
28.1	Isométrie vectorielle, endomorphisme orthogonal	439
28.1.1	Conservé les longueurs	439
28.1.2	Le groupe orthogonal	440
28.2	Réduction des isométries vectorielles	442
28.2.1	Les isométries diagonalisables	442
28.2.2	Réduction d'une isométrie d'un euclidien	443
28.3	Etudes de $O(1)$ et $O(2)$	445
28.3.1	Cas de $O(1)$	445
28.3.2	Cas de $O(2)$	445
28.4	Etude de $O(3)$	446
28.4.1	Résultats structurels sur $O(3)$	446
28.4.2	Récapitulatif pour $O(3)$	447
28.4.3	Cas des rotations de \mathbb{R}^3 euclidien	448
28.4.4	Exemples d'études dans $O(3)$, puis $O(4)$	449
29	Intégration sur un intervalle	455
29.1	Sur un intervalle $[a, \infty[$	455
29.1.1	Convergence et intégrale sur $[a, \infty[$	455
29.1.2	Intégrabilité et convergence sur $[a, \infty[$	457
29.2	Fonctions positives sur $[a, \infty[$	458
29.2.1	Caractérisations de la convergence	458
29.2.2	Fonctions de références, dites de <i>Riemann</i> , sur $[a, \infty[$	459
29.2.3	Comparaisons entre fonctions positives sur $[a, \infty[$	460
29.2.4	Théorèmes de comparaison sur $[a, \infty[$	461
29.2.5	Intégrabilité et limite en ∞	462
29.3	Intégrale sur un intervalle quelconque	463
29.3.1	Adaptations sur $[a, b[$ ou $]a, b]$, avec a et b réels	463
29.3.2	Fonctions de références, sur $[a, b[$ ou $]a, b]$	464
29.3.3	Adaptations sur $I =]a, b[$, où $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$	465
29.4	Méthodes de calculs d'intégrales	466
29.4.1	Décompositions	466
29.4.2	Changement de variable sur $]a, b[$	467
29.4.3	Intégration par partie sur $]a, b[$	469

29.5	Intégration des relations de comparaison	471
29.6	Quelques exemples supplémentaires	472
29.6.1	Intégrale de <i>Dirichlet</i>	472
30	Séries numériques à termes réels ou complexes	477
30.1	Suites et séries	477
30.1.1	Les séries sont des suites	477
30.1.2	Les suites sont des séries	478
30.1.3	Convergence et intégrabilité	478
30.2	Les séries incontournables	479
30.2.1	Série géométrique	479
30.2.2	Série harmonique	479
30.2.3	Série exponentielle	479
30.3	Les idées fondamentales	480
30.3.1	Croissance pour une série de réels positifs	480
30.3.2	Conséquences du théorème de majoration	480
30.3.3	Comparaison avec le comportement d'une intégrale	481
30.3.4	Condition nécessaire de convergence	482
30.3.5	Séries de <i>Riemann</i>	482
30.4	Quelques opérations sur les séries	483
30.4.1	Quelques résultats immédiats	483
30.4.2	Absolute convergence	483
30.4.3	Séries de complexes	484
30.5	Savoir-faire fondamentaux	484
30.5.1	Séries alternées	484
30.5.2	Développements asymptotiques	486
30.5.3	Comparaison logarithmique, critère de <i>d'Alembert</i>	486
30.6	Evaluation de la vitesse de convergence	487
30.6.1	Vitesse de convergence ou de divergence	487
30.6.2	Evaluation du comportement à l'aide d'intégrales	487
30.6.3	Evaluation du comportement par équivalence	491
30.6.4	Comportement de $n!$ quand $n \rightarrow \infty$, formule de <i>Stirling</i>	492
30.7	Plan d'étude et exemples	493
31	Familles sommables	499
31.1	Cas des familles de réels positifs	499
31.2	Cas des familles de réels et de complexes	503
31.3	Cas de $I = \mathbb{N}$, suites sommables	505
31.4	Cas de $I = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, suites doubles	506
31.4.1	Sommer une suite double	506
31.4.2	Cas des suites doubles à termes réels positifs	508
31.4.3	Cas des suites doubles à termes complexes	509
31.4.4	Cas d'une suite double « produit »	510
31.5	Produit de <i>Cauchy</i> de deux séries	510
32	Suites de fonctions	513
32.1	Convergence simple d'une suite de fonctions	513
32.2	Convergence uniforme d'une suite de fonctions	515
32.2.1	Définitions	515
32.2.2	Etudes de convergences uniformes sur A	515

32.2.3	Convergence uniforme et continuité	517
32.2.4	Théorème de la double limite	518
32.2.5	Convergence uniforme et intégration	520
32.2.6	Convergence uniforme et dérivation	520
32.2.7	Convergence uniforme et intégrabilité	522
32.2.8	Cas délicats, sources de réflexion	522
33	Séries de fonctions	527
33.1	Convergences simple et uniforme	527
33.1.1	Définitions	527
33.1.2	Théorèmes de continuité, primitivation et intégration	528
33.1.3	Dériver la somme d'une série de fonctions	529
33.2	Convergence normale d'une série de fonctions	529
33.2.1	Définition et efficacité	529
33.2.2	Récapitulatif	530
33.2.3	Exemple d'une convergence uniforme, non normale	530
33.3	Etude de la fonction zéta de <i>Riemann</i>	531
33.4	Etude des séries trigonométriques	532
33.4.1	Polynômes trigonométriques	532
33.4.2	Quelques intégrales utiles	533
33.4.3	Deux présentations	533
33.4.4	Diverses qualités de convergence	534
33.4.5	Quelques exemples	535
34	Approximations uniformes par des fonctions spécifiques	537
34.1	Norme de la convergence uniforme	537
34.1.1	Norme de la convergence uniforme	537
34.1.2	Fonctions continues	538
34.2	Quelques fonctions spécifiques	538
34.2.1	Associées à une subdivision du segment $[a, b]$	538
34.2.2	Sur un intervalle	541
34.3	Approximations par des fonctions en escalier	541
34.3.1	Théorème d'approximation, fonctions en escalier	542
34.3.2	Des développements hors programme	542
34.4	Approximation par des polynômes	544
35	Séries entières de variable réelle ou complexe	547
35.1	Des séries de fonctions monômes	547
35.2	Propriétés fondamentales	547
35.2.1	Un lemme d' <i>Abel</i>	547
35.2.2	Disque de convergence	548
35.2.3	Deux prototypes	549
35.2.4	Continuité de la somme totale	549
35.2.5	Intégration et primitivation sur $[0, x]$	550
35.2.6	La somme totale est C^∞ sur $] -R, R[$	551
35.3	Détermination du rayon de convergence	552
35.3.1	Avec le critère de <i>d'Alembert</i>	552
35.3.2	Un cas fréquent, conséquence de ce critère	553
35.3.3	Comparaisons de rayons de convergence	553
35.3.4	Quelques exemples	553

35.4	Opérations algébriques sur les séries entières	554
35.4.1	Combinaison linéaire	554
35.4.2	Produit de deux séries entières	555
35.5	Développements et sommations	556
35.5.1	Introduction	556
35.5.2	Développement	556
35.5.3	Développements usuels	558
35.5.4	Sommations de séries entières	559
35.5.5	Questions de parité et imparité	561
35.6	Applications aux équations différentielles	561
35.6.1	Le prototype $(1+x)^\alpha$	561
35.6.2	Plan usuel	563
35.6.3	Un autre exemple développé	563
35.7	Compléments	564
35.7.1	Théorème du zéro isolé	564
35.7.2	Développements des fractions rationnelles	565
35.8	L'exponentielle $z \mapsto \exp(z)$, $z \in \mathbb{C}$	566
35.8.1	\exp est un morphisme	566
35.8.2	Propriétés de l'exponentielle	566
35.8.3	Fonctions trigonométriques	568
35.8.4	Résolutions d'équations	568
35.9	Quelques illustrations et un problème	570
35.9.1	Convergence des polynômes de <i>Taylor</i> de \sin	570
35.9.2	Des séries entières et des équations différentielles	570
36	Suites et séries d'intégrales	573
36.1	Suite d'intégrales	573
36.1.1	Interversion de symboles	573
36.1.2	Rappel : convergence uniforme sur un segment	574
36.1.3	Convergence dominée sur un intervalle I	574
36.1.4	Exemples	574
36.2	Série d'intégrales	577
36.2.1	Intégration terme à terme	577
36.2.2	Convergence uniforme sur un segment	577
36.2.3	Intégration terme à terme sur un intervalle	577
36.2.4	De multiples exemples	578
36.2.5	D'autres possibilités que ces deux théorèmes	581
37	Intégrales à paramètres	583
37.1	Théorèmes sous domination	583
37.1.1	Passage à la limite sous l'intégrale	583
37.1.2	Théorèmes de continuité	584
37.1.3	Théorème de dérivation de <i>Leibniz</i>	585
37.1.4	Dérivations successives	587
37.2	La fonction Γ d' <i>Euler</i>	589
37.3	Applications et exemples développés	591

38	Equations différentielles linéaires (vectorielles)	599
38.1	Introduction aux EDL vectorielles du 1 ^{er} ordre	599
38.1.1	Equation, solutions et problème de <i>Cauchy</i>	599
38.1.2	Présentation matricielle d'une EDL	600
38.1.3	Utilisation d'une base et changement de base	600
38.1.4	Equation homogène et superposition des solutions	602
38.2	Théorème de <i>Cauchy</i> linéaire	603
38.2.1	Mise sous forme intégrale du problème de <i>Cauchy</i>	603
38.2.2	Construction et unicité d'une solution	603
38.2.3	Dimension de $\text{Sol}(E)$	605
38.3	Les équations différentielles d'ordre n , cas général	605
38.3.1	Système différentiel associé	605
38.3.2	Développements structurels	606
38.4	Système fondamental de solutions d'un système	606
38.4.1	Base de $\text{Sol}(s)$	606
38.4.2	Matrice fondamentale, solution générale de (s)	607
38.4.3	Méthode de <i>Lagrange</i> , de variations des constantes	608
38.4.4	Système différentiels à coefficients constants	609
38.5	Exemples de systèmes à coefficients non constants	609
38.6	Equations linéaires scalaires d'ordre 2	612
38.6.1	Introduction aux équations d'ordre 2	612
38.6.2	Résultats fondamentaux	612
38.6.3	Méthodes de résolution	613
38.6.4	Premiers exemples d'EDL2	614
38.7	Visualisation des trajectoires des solutions	617
38.8	EDL d'ordre $n \geq 2$: premiers développements	619
38.8.1	Une EDL3 et un système associé	619
38.8.2	Changement de variable dans une EDL	619
39	Séries de vecteurs, de matrices	621
39.1	Généralités	621
39.1.1	Convergence et divergence	621
39.1.2	Utilisation d'une base de E	622
39.1.3	Absolue convergence	622
39.2	Série géométrique et série exponentielle	623
39.2.1	Série géométrique	623
39.2.2	Série exponentielle	624
39.3	Normes sur les espaces de matrices	625
39.3.1	Panorama de diverses normes	625
39.3.2	Normes sous-multiplicatives	626
39.3.3	Normes subordonnées ou induites	627
39.4	Produit de <i>Cauchy</i> de deux séries	628
39.5	Etude de l'exponentielle de matrices	629
39.5.1	Séries entières et séries de matrices	629
39.5.2	Calculs de l'exponentielle de certaines matrices	629
39.5.3	Propriétés de l'exponentielle des matrices	630
39.6	Quelques exemples développés	633

40	Systèmes différentiels à coefficients constants	637
40.1	Un chapitre de synthèse	637
40.1.1	Rappels sur les systèmes différentiels et l'exponentielle	637
40.1.2	La solution au problème de <i>Cauchy</i>	638
40.1.3	D'autres démonstrations de propriétés déjà assurées	639
40.2	Réduction de la matrice du système	640
40.2.1	Changement de fonction inconnue	640
40.2.2	Système sans second membre, A diagonalisable dans \mathbb{K}	640
40.2.3	Système avec second membre, A diagonalisable dans \mathbb{K}	642
40.2.4	Si A trigonalisable dans \mathbb{K}	643
40.3	Comparaison de diverses méthodes	644
41	Fonctions différentiables, dérivées partielles	649
41.1	Différentielles, fonctions différentiables	649
41.2	Dérivée selon un vecteur, dérivées partielles	650
41.2.1	Dérivée selon un vecteur	650
41.2.2	Dérivées partielles	651
41.3	Selon les dimensions de E et F	653
41.3.1	Fonction numérique à une variable : $n = p = 1$	653
41.3.2	Fonction vectorielle à une variable : $n = 1, p \geq 2$	653
41.3.3	Fonction numérique à plusieurs variables : $n \geq 2, p = 1$	653
41.3.4	Fonction vectorielle à plusieurs variables : $n \geq 2, p \geq 2$	654
41.3.5	Exemples de calcul de dérivées partielles	655
41.4	Opérations sur les applications différentiables	658
41.4.1	Combinaison linéaire, bilinéarité et produits	658
41.4.2	Composition d'applications différentiables	659
41.4.3	Dérivée le long d'un arc	660
42	Fonctions de classe C^k, $k \geq 1$	661
42.1	Fonctions de classe C^1 sur U	661
42.1.1	Utilisation des arcs	663
42.1.2	Exemples	664
42.2	Interprétations géométriques	666
42.2.1	Surface et plan tangent	666
42.2.2	Récapitulatif géométrique pour f de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}	667
42.3	Fonctions de classe C^k sur U , $k \geq 1$	668
42.4	Opérations sur les applications de classe C^k	670
42.4.1	Opérations algébriques sur les applications de classe C^k	670
42.4.2	Composition d'applications de classe C^k	670
43	Applications du calcul différentiel	673
43.1	Vecteurs tangents à une partie X de E	673
43.1.1	Vecteurs tangents en un point a	673
43.1.2	Cas du graphe d'une fonction différentiable	674
43.1.3	Cas d'une ligne de niveau d'une fonction f	674
43.1.4	Interprétation du gradient d'une fonction numérique	675
43.1.5	Exemples plus inhabituels	676
43.2	Recherche d'extremums d'une fonction numérique	677
43.2.1	Les points critiques	677
43.2.2	Extremum sur un ouvert ou sur un compact	679

43.2.3	Applications à d'autres études	680
43.3	Equations aux dérivées partielles	681
43.3.1	Introduction aux équations aux dérivées partielles	681
43.3.2	Les équations aux dérivées partielles de base	682
43.3.3	Résolution par changement de variables	683
43.3.4	Recherche de solutions particulières d'un certain type	686
43.3.5	Séparation des variables	687
44	Espaces probabilisés	689
44.1	Tribu sur un ensemble Ω , événement	689
44.2	Probabilité - Espace probabilisé	690
44.3	Probabilité conditionnelle	692
44.3.1	Définition	692
44.3.2	Exemples	692
44.3.3	Formule des probabilités totales	693
44.4	Exemples d'application	694
44.5	Indépendance	696
44.6	Exercices classiques de probabilité	697
45	Variables aléatoires discrètes	701
45.1	Variable aléatoire discrète, loi de probabilité	701
45.2	Les lois usuelles des variables aléatoires réelles	702
45.3	Couple de variables aléatoires - Indépendance	704
45.4	Fonctions des variables d'un couple de v. a. i.	706
45.5	Espérance	707
45.6	Variance - Ecart type - Covariance	711
45.6.1	Moments d'ordre r	711
45.6.2	Pour les lois classiques	712
45.6.3	Pour une loi produit	714
45.6.4	Covariance	715
45.7	La loi des grands nombres	716
45.8	Fonctions génératrices	717
45.9	Divers exemples développés	719
III	« Des cerises sur le gâteau »	
	Des enrichissements hors programme MP	727
A	Les surprises et difficultés de la dimension infinie	729
A.1	Algèbre linéaire	729
A.1.1	Injectivité, surjectivité et bijectivité	729
A.1.2	Valeurs propres et valeurs spectrales	730
A.2	Espace préhilbertiens	730
A.2.1	Représentation des formes linéaires	730
A.2.2	Existence de l'adjoint	731
A.2.3	Orthogonal d'un sous-espace de dimension infinie	731
A.3	Topologie des espaces vectoriels normés	732
A.3.1	Non-équivalence des normes	732
A.3.2	Fermé-borné non compact	733
A.3.3	Espace vectoriel normé sur \mathbb{R} , non complet	733

A.3.4	Théorème de <i>Riesz</i>	733
A.3.5	Applications linéaires et non continues	734
B	Espace complet et suite de <i>Cauchy</i>	735
B.1	Suite de <i>Cauchy</i> et espace complet	735
B.1.1	Suite de <i>Cauchy</i>	735
B.1.2	Espace complet	736
B.1.3	Partie complète	737
B.2	Spécificités des espaces complets	738
B.2.1	Critère de <i>Cauchy</i> et convergence absolue	738
B.2.2	$\mathcal{B}(A, F)$ est complet	738
B.2.3	Théorème du point fixe, pour E complet	739
B.2.4	Un espace de dimension infinie non complet	740
C	Espaces topologiques et parties compactes	741
C.1	Valeurs d'adhérence d'une suite	741
C.2	Espaces topologiques	742
C.3	Compacité	743
C.3.1	Définition de compacité de <i>Bolzano-Weierstrass</i>	743
C.3.2	Définition de compacité de <i>Borel-Lebesgue</i>	744
D	Développements sur les séries numériques, les séries entières	745
D.1	Etude des séries de <i>Bertrand</i>	745
D.2	Règle de <i>Raabe-Duhamel</i>	746
D.3	Transformation d' <i>Abel</i>	747
D.4	Arrangement linéaire d'une série double	749
D.5	Un théorème de <i>Tauber</i> sur les séries entières	751
D.6	Deux théorèmes d' <i>Abel</i> pour les séries entières	752
D.7	Séries de fonctions et familles sommables	753
E	Compléments et applications de la réduction	755
E.1	Théorème d' <i>Hadamard</i> , disques de <i>Gerschgorin</i>	755
E.2	Racine $n^{\text{ième}}$ d'une matrice	756
E.3	Polynôme et matrices compagnons	757
E.4	Matrices de rang 1 diagonalisables	758
E.5	Diagonalisation d'une matrice circulante	759
E.6	Réduction de matrices définies par blocs	760
E.7	Démonstrations du théorème de <i>Cayley-Hamilton</i>	761
E.8	Commutant et décomposition de <i>Dunford</i>	763
F	Endomorphismes antisymétriques d'un euclidien	765
F.1	Cas général	765
F.2	Cas de la dimension 3	766
G	Polynômes orthogonaux	767
G.1	Des produits scalaires dans $\mathbb{R}[X]$ puis $\mathbb{C}[X]$	767
G.2	Propriétés communes	769

H	Approfondissements sur les équations différentielles	771
H.1	Compléments sur les EDL2	771
H.1.1	Changement de variable, équations d' <i>Euler</i>	771
H.1.2	Changement de fonction inconnue dans une EDL2	773
H.2	Equations et systèmes différentiels non linéaires	776
H.2.1	Equations différentielles	776
H.2.2	Système différentiel	776
H.2.3	Interprétations	776
H.3	Equations d'ordre 1	777
H.3.1	Existence et unicité locale	777
H.3.2	Théorème de prolongement d'une solution	778
H.3.3	Théorème de <i>Cauchy-Lipschitz</i>	778
H.3.4	Comparaison linéaire-non linéaire	779
H.3.5	Propriétés analytiques des solutions	780
H.4	Equations à variables séparables	781
H.4.1	Présentation	781
H.4.2	Résolution dans le cas général	783
H.4.3	Remarques fondamentales	784
H.5	Equations autonomes	784
H.6	Systèmes autonomes	786
H.6.1	Invariance par translation	786
H.6.2	Un plan d'étude des systèmes autonomes	786
H.6.3	Notions sur les intégrales premières	787
H.6.4	Equation autonome d'ordre 2	787
H.6.5	Le système de <i>Volterra</i>	788
H.7	Etudes qualitatives	789
H.7.1	Etude qualitative des solutions	789
H.7.2	Symétries de l'ensemble des courbes intégrales	789
H.8	Introduction à l'analyse numérique des ED	791
H.8.1	Méthode d' <i>Euler</i>	791
H.8.2	Méthode de <i>Runge-Kutta</i> d'ordre 4	792
I	Transformées de Laplace, de Fourier et intégrales à paramètres	793
I.1	Transformation de <i>Laplace</i>	793
I.1.1	Définition et propriétés élémentaires	793
I.1.2	Perspectives d'utilisation	794
I.2	Transformation de <i>Fourier</i>	796
I.2.1	Définition et propriétés élémentaires	796
I.2.2	Transformée de <i>Fourier</i> d'un produit de convolution	798
I.3	Continuité, dérivabilité : intégrales à paramètres	800
I.3.1	Développements sur la continuité	800
I.3.2	Complément sur la dérivabilité	801
I.4	Intégration d'intégrale à paramètre	801
I.5	D'autres exemples plus profonds	805
J	Systèmes de coordonnées	809
J.1	Coordonnées polaires	809
J.2	Coordonnées cylindriques	809
J.3	Coordonnées sphériques	810

K	Courbes, arcs et surfaces	811
K.1	Courbes de niveau : les fonctions implicites	811
K.1.1	Fonctions implicites à deux ou trois variables	811
K.1.2	Etudes locales de courbes ou surfaces	813
K.1.3	Equation différentielle et fonction implicite	815
K.2	Arcs paramétrés plans	816
K.2.1	Rappels	816
K.2.2	Allures en un point stationnaire	817
K.2.3	Etude des branches infinies	818
K.3	Un arc non rectifiable	823
K.4	Introduction au plan osculateur	824
K.5	Courbes planes ou portées par une surface	825
K.6	Quelques jolies courbes	827
L	Les intégrales multiples	831
L.1	Questions de mesures	831
L.1.1	Ensembles mesurables	831
L.1.2	Intégrale double sur un compact mesurable	832
L.1.3	Ensembles négligeables	833
L.2	Intégrale double sur un produit de segments	833
L.3	Intégrale double sur une partie élémentaire	834
L.3.1	Inégrale sur une partie élémentaire	834
L.3.2	Intégrale double et volume	835
L.3.3	Intégrale sur une partie simple	835
L.4	Propriétés et calculs des intégrales doubles	835
L.4.1	Propriétés immédiates	836
L.4.2	Changement de variables	837
L.4.3	Théorème de <i>Green-Riemann</i>	838
L.4.4	Application aux calculs d'aires	839
L.4.5	Deux exemples plus longs à traiter	839
L.5	Intégrales triples	842
L.5.1	Dans l'espace de dimension 3	842
L.5.2	Calculs d'intégrales triples	843
M	Développements en arithmétique et en algèbre	845
M.1	Applications au codage et à la cryptographie	845
M.1.1	Calculs arithmétiques	845
M.1.2	Exemples d'applications : R.I.B., codes de <i>Hamming</i>	846
M.2	Codage R.S.A.	847
M.3	Polynômes d'un élément d'une algèbre (unitaire)	849
M.3.1	Sous-algèbre engendrée par un élément	849
M.3.2	Polynômes annulateurs, polynôme minimal de a	849
M.3.3	Cas d'une algèbre intègre	851
M.4	Corps finis	852
N	Géométrie euclidienne	853
N.1	Distances entre objets	853
N.1.1	Projections orthogonales	853
N.1.2	Distances à des sous-espaces affines	854
N.2	Mesure des angles	857

N.2.1	Dans un espace préhilbertien réel	857
N.2.2	Dans le plan orienté	857
N.2.3	Dans l'espace \mathcal{E}_3	858
N.3	Triangle dans le plan	858
N.4	Cercle et sphère	859
N.4.1	Cercle dans le plan	859
N.4.2	Sphère dans l'espace	861
N.4.3	Cercle dans l'espace	862
N.4.4	Lignes de niveau dans le plan	863
O	Les coniques, point de vue focal	865
O.1	Définition focale des coniques	865
O.1.1	Foyer, directrice et excentricité	865
O.1.2	Coniques à centre	866
O.1.3	Parabole	870
O.2	Diverses constructions géométriques	870
O.3	Sections du cône de révolution	872
O.4	Courbes planes du deuxième degré	872
Index		873