Partie 1.
Algèbre linéaire

Avertissement :
L'objectif premier du programme officiel est la réduction des matrices et des endomorphismes. Ce point est traité aux chapitres 7 et 8 mais nous l'avons fait précéder d'un développement important sur les bases de l'algèbre linéaire (incluant des révisions de SUP) dont la mauvaise compréhension explique bien souvent les difficultés rencontrées sur la réduction.
L'autre « grande nouveauté » du programme de SPE est constituée des déterminants : c'est l'objet du chapitre 4, complété par les chapitres 5 et 6 sur le calcul matriciel et les systèmes linéaires.

Synthèses de cours

Exercices

Solutions rédigées des exercices

SYNTHESES DE COURS

■ Chapitre 1. Quelques notions élémentaires d'algèbre

Nous donnons, **à titre culturel**, quelques définitions et propriétés élémentaires d'algèbre illustrées par des exemples.

◆ Applications

● Composition

La loi de composition $\circ$ est toujours associative : $\begin{cases} \mathrm{E} \xrightarrow{f} \mathrm{F} \xrightarrow{g} \mathrm{G} \xrightarrow{h} \mathrm{H} \\ h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \end{cases}$. Les matrices représentant des applications linéaires, leur multiplication est également associative : $(AB)C = A(BC)$.

● Injection, surjection, bijection

$f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est « injective » si tout élément de F a **au plus** un antécédent. Elle est alors « inversible à gauche », i.e. $\exists g : \mathrm{F} \to \mathrm{E}$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$. Toute équation du type $f(x) = b$ admet alors **au plus** une solution.

$f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est « surjective » si tout élément de F a **au moins** un antécédent. Elle est alors « inversible à gauche », i.e. $\exists h : \mathrm{F} \to \mathrm{E}$ telle que $f \circ h = \mathrm{Id}_{\mathrm{F}}$. Toute équation du type $f(x) = b$ admet alors **au moins** une solution.

$f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est « bijective » si tout élément de F a **exactement** un antécédent. Elle est alors « inversible », i.e. $\exists f^{-1} : \mathrm{F} \to \mathrm{E}$ telle que $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$ **et** $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_{\mathrm{F}}$. Toute équation du type $f(x) = b$ admet alors **exactement** une solution.

Confusion fréquente : il ne suffit pas d'établir que $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathrm{F}}$ **ou** $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$ pour prouver que f est bijective avec pour inverse g, il faut $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathrm{F}}$ **et** $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$.

Par contre : si f est un endomorphisme **en dimension finie** alors $f \circ g = \mathrm{Id}$ suffit pour dire qu'ils sont l'inverse l'un de l'autre car l'autre égalité $g \circ f = \mathrm{Id}$ est impliquée par la formule du rang. De même, si on a des matrices **carrées** qui vérifient $AB = I$ alors elles sont bien inversibles (et inverses l'une de l'autre) sans que l'on ait besoin de vérifier $BA = I$.

◆ Loi de composition

● Définitions et propriétés

Une « loi de composition interne » à E est une application de $\mathrm{E} \times \mathrm{E} \to \mathrm{E}$. Elle est :

– « associative » si $(x * y) * z = x * (y * z)$. Toutes les lois usuelles sont associatives ($+, \times, \circ$), une loi non associative est anti-pratique ;
– « commutative » si $x * y = y * x$. $+$ l'est mais $\times$ ne l'est que pour les nombres ;

– « distributive » par rapport à T si $x*(y \mathrm{T} z)=(x*y)\mathrm{T}(x*z)$. $\times$ l'est par rapport à $+$.

Un élément est :

– « neutre » si $\forall x$, $e*x=x$ **et** $x*e=x$. 0 est le neutre de $+$, 1 celui de $\times$, Id celui de $\circ$ et I celui de la multiplication des matrices carrées ;
– « symétrisable » ou « inversible » si $\exists x^{-1}$, $x*x^{-1}=e$ **et** $x^{-1}*x=e$. Pour la loi $+$, tout élément est symétrisable ;
– « régulier » si on peut le simplifier : $a*x=b*x \Rightarrow a=b$ **et** $x*a=x*b \Rightarrow a=b$.

Confusion fréquente : il ne suffit pas que $\forall x$, $e*x=x$ pour affirmer qu'il s'agit d'un neutre, il faut aussi $\forall x$, $x*e=x$. La remarque vaut pour un élément inversible ou régulier.

Une loi associative est pratique car alors :

– il ne peut y avoir qu'un symétrique ;
– tout élément inversible est régulier (on simplifie en opérant par l'inverse).

Mais la loi $\circ$ est encore plus pratique car inversible équivaut à régulier.

◆ Structures

● Groupe

Un « groupe » est un ensemble muni d'une loi associative, ayant un neutre et où tout élément est inversible. Si la loi est commutative, le groupe est « abélien ».

Les groupes usuels sont :

– $(\mathrm{Z},+)$, $(\mathrm{Q},+)$, $(\mathrm{R},+)$, $(\mathrm{C},+)$;
– $(\mathrm{Q}^*,\times)$, $(\mathrm{R}^*,\times)$, $(\mathrm{C}^*,\times)$;
– $(\mathrm{U},\times)$, groupe des complexes de module 1 et ses sous-groupes des racines énièmes de 1 ;
– $(GL(\mathrm{E}),\circ)$ groupe linéaire (constitué des isomorphismes d'un EV E) et son sous-groupe $O(\mathrm{E})$ (groupe des isométries d'un préhilbertien E) ;
– $(GL_n(\mathrm{K}),\times)$ groupe des matrices carrées inversibles et son sous-groupe $O(n)$ (groupe des matrices orthogonales) ;

Dans un groupe, on peut toujours simplifier car tous les éléments sont réguliers.

● Anneau

$(\mathrm{A},+,\times)$ est un « anneau » si :

– $(\mathrm{A},+)$ est un groupe abélien (on note son neutre 0) ;
– $\times$ est une loi de composition interne, associative, ayant un neutre noté 1, distributive par rapport à +.

Les anneaux usuels sont $(\mathrm{Z},+,\times)$ et $(\mathrm{K}[X],+,\times)$ dans lesquels on pratique la division euclidienne.

● Corps

$(\mathrm{K},+,\times)$ est un « corps » si c'est un anneau dans lequel tout élément autre que 0 est inversible pour $\times$.

Les corps usuels sont $(\mathrm{Q},+,\times)$, $(\mathrm{R},+,\times)$, $(\mathrm{C},+,\times)$ et les fractions rationnelles.

- **Espaces vectoriels**

$(\mathrm{E},+,\cdot)$ est un « espace vectoriel sur le corps K » si et seulement si $(\mathrm{E},+)$ est un groupe commutatif et $\cdot$ une loi de comp. externe de $\mathrm{K}\times\mathrm{E}$ dans E vérifiant les propriétés de :

– « distributivité mixte » : $a\cdot(\vec{x}+\vec{y})=a\cdot\vec{x}+a\cdot\vec{y}$ et $(a+b)\cdot\vec{x}=a\cdot\vec{x}+b\cdot\vec{x}$;

– « associativité mixte » : $(ab)\cdot\vec{x}=a\cdot(b\cdot\vec{x})$;

– « opérateur neutre » : $1\cdot\vec{x}=\vec{x}$.

Les EV usuels sont K^n, $\pounds(\mathrm{E},\mathrm{F})$ ensemble des applications linéaires d'un EV dans un autre, E^A ensemble des applications d'un ensemble A dans un EV E et $M_{nm}(\mathrm{K})$.

- **Algèbre**

$(\mathrm{A},+,\cdot,\times)$ est une « algèbre sur le corps K » si et seulement si $(\mathrm{E},+,\cdot)$ est un espace vectoriel sur K et $(\mathrm{E},+,\times)$ un anneau avec « associativité mixte » entre les deux lois multiplicatives, i.e. $\lambda\cdot(x\times y)=(\lambda\cdot x)\times y=x\times(\lambda\cdot y)$.

De nombreux ensembles étudiés aussi bien en PCSI qu'en PC sont des algèbres : $\mathrm{K}[X]$, K^{N} (espace des suites), $\pounds(\mathrm{E})$, K^A (ensemble des applications de A dans K) et $M_n(\mathrm{K})$. Néanmoins, la notion d'algèbre elle-même ne figure pas au programme.

◆ Morphismes

- **Définition**

Un « morphisme » est une application $(\mathrm{G},*)\xrightarrow{\varphi}(\mathrm{H},\perp)$ t.q. $\varphi(x*y)=\varphi(x)\perp\varphi(y)$.

On parle de :

– « morphisme de groupe » si G et H sont des groupes ;

– « morphisme d'anneau » si G et H sont des anneaux (la propriété doit être vérifiée pour les deux lois) mais on exige en outre $\varphi(1)=1$;

– « morphisme de corps » si G et H sont des corps et $\varphi(1)=1$;

– « application linéaire » si G et H sont des EV ;

– « morphisme d'algèbre » si G et H sont des algèbres (la propriété doit être vérifiée pour les trois lois) et $\varphi(1)=1$.

- **Propriétés**

On a les propriétés suivantes :

– l'image du neutre de G est le neutre de H ;

– l'image d'une sous-structure (sous-groupe, sous-anneau, sous-corps, SEV, sous-algèbre) de G est une sous-structure de H ;

– l'image réciproque d'un sous-groupe de H est un sous-groupe de G (ou…).

$\ker f=f^{-1}(\{0\})$ et $\mathrm{Im}\, f=f(\mathrm{G})$ sont des sous-groupes (ou SEV), respectivement de G et H (mais pas des sous-anneaux ou sous-corps).

Théorème : Si f est un morphisme (de groupe, d'anneau, de corps ou une AL) :

– f injective $\Leftrightarrow$ $\ker f=\{0\}$;

– f surjective $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Im}\, f=\mathrm{H}$.

◆ Anneau et EV K[X]

Ce paragraphe est utile pour le chapitre 7 sur les polynômes d'endomorphismes.

- **Définition et structure**

$K[X]$ est l'ensemble des polynômes à coefficient dans le corps K.

$(K[X],+,\ )$ est un anneau commutatif intègre (ce qui signifie que $PQ=0$ implique $P=0$ ou $Q=0$).

$(K[X],+,\cdot)$ est un EV sur le corps K. Il est de dimension infinie.

$(K[X],+,\ ,\cdot)$ est une algèbre mais cela ne figure pas au programme.

- **Division euclidienne**

Soit $P_0 \neq 0$, $\forall P \in K[X]$, $\exists!(Q,R) \in K[X]$, $P = QP_0 + R$ avec $\deg R < \deg P_0$.

Si $R=0$, « P_0 divise Q ».

- **Formule de Taylor**

$$\forall P \in K[X],\ P(X) = \sum_{i=0}^{\deg P} \frac{(X-a)^i}{i!} P^{(i)}(a).$$

- **Racines d'un polynôme**

a est « racine de P » si $P(a)=0$.

Théorème : a racine de P $\Leftrightarrow$ $X-a$ divise P.

a racine d'ordre p $\Leftrightarrow$ $P(a) = \cdots = P^{(p-1)}(a) = 0$ et $P^{(p)}(a) \neq 0$.

Corollaire : si $P(x) = Q(x)$, $\forall x \in R$ ou C alors $P = Q$.

- **Décomposition en polynômes irréductibles**

Théorème : dans C, tout polynôme se décompose en $P(X) = a_n(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_n)$. Ainsi les $X-a$ sont les seuls irréductibles.

Dans R, les polynômes $X^2+\alpha X+\beta$ tels que $\alpha^2-4\beta<0$ sont également irréductibles.

Chapitre 2. Espaces vectoriels et applications linéaires (rappels de SUP et compléments)

Généralités

Ce paragraphe est un rappel des notions vues en SUP.

- **Définitions**

$(E,+,\cdot)$ est un « espace vectoriel sur le corps K » si et seulement si $(E,+)$ est un groupe commutatif et $\cdot$ une loi de comp. externe de $K \times E$ dans E vérifiant les propriétés de :

– « distributivité mixte » : $a\cdot(\vec{x}+\vec{y}) = a\cdot\vec{x} + a\cdot\vec{y}$ et $(a+b)\cdot\vec{x} = a\cdot\vec{x} + b\cdot\vec{x}$;

– « associativité mixte » : $(ab)\cdot\vec{x} = a\cdot(b\cdot\vec{x})$;

– « opérateur neutre » : $1\cdot\vec{x} = \vec{x}$.

$f : E \to F$ est une « application linéaire » si et seulement si c'est un morphisme d'espaces vectoriels, i.e. $f(a\vec{x}+b\vec{y}) = af(\vec{x}) + bf(\vec{y})$.

$B : \mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2 \to \mathrm{F}$ est une « application bilinéaire » si et seulement si elle est linéaire par rapport à chaque vecteur, i.e. $B(a\vec{x}_1 + b\vec{y}_1, \vec{x}_2) = aB(\vec{x}_1, \vec{x}_2) + bB(\vec{y}_1, \vec{x}_2)$ et $B(\vec{x}_1, a\vec{x}_2 + b\vec{y}_2) = aB(\vec{x}_1, \vec{x}_2) + bB(\vec{x}_1, \vec{y}_2)$.
$g : \mathrm{E}_1 \times \cdots \times \mathrm{E}_n \to \mathrm{F}$ est une « application n–linéaire » si et seulement si elle est linéaire par rapport à chaque vecteur, i.e. pour tout i, $g(\vec{x}_1, \dots, a\vec{x}_i + b\vec{y}_i, \dots, \vec{x}_n) = ag(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_n) + bg(\vec{x}_1, \dots, \vec{y}_i, \dots, \vec{x}_n)$.

● **Exemples fondamentaux**

L'ensemble des applications de A, ensemble quelconque, dans E, K –EV, est un K –EV. En particulier, K étant un corps, sont des K –EV :

– K, $\mathrm{K} \times \mathrm{K}$, …, K^n ;
– $\mathrm{K}[\mathrm{X}]$, ensemble des polynômes sur K et K^{N}, ensemble des suites dans K.

Le produit cartésien de K –EV est un K –EV.
L'ensemble des applications linéaires d'un K –EV, E, dans un autre K –EV, F, est un K –EV, noté $\pounds(\mathrm{E}, \mathrm{F})$:

– lorsque $\mathrm{F} = \mathrm{K}$, on le note E^* : c'est le « dual de E » ;
– lorsque $\mathrm{E} = \mathrm{F}$, on le note $\pounds(\mathrm{E})$ ou $\mathrm{End}(\mathrm{E})$ c'est un anneau pour les lois $+$ et $\circ$ (autrement dit $(\pounds(\mathrm{E}), +, \circ,)$ est une algèbre mais cette notion n'est pas au programme).

◆ Sous-espace vectoriel

Les trois premiers paragraphes sont un rappel des notions vues en SUP.

● **Définition, caractérisation, intersection**

$\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$ est un « sous-espace vectoriel » de E, K –EV, si la restriction des lois de E à F lui confère une structure de K –EV.
F SEV de E $\Leftrightarrow$ $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$, $\mathrm{F} \neq \varnothing$, $\forall (a,b) \in \mathrm{K}$, $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in \mathrm{F}$, $a\vec{x} + b\vec{y} \in \mathrm{F}$.
Théorème : l'intersection de SEV est encore un SEV.

● **Combinaison linéaire**

Soit $\mathrm{A} = \{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\}$, une famille finie de vecteurs, toute somme $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{x}_i$ est une « combinaison linéaire » d'éléments de A.
F SEV de E $\Leftrightarrow$ $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$, $\mathrm{F} \neq \varnothing$, et F stable par toute combinaison linéaire.

● **Sous-espace vectoriel engendré**

$\mathrm{vect}(\mathrm{A})$ est l'intersection de tous les SEV contenant A (c'est donc le plus petit SEV contenant A). Lorsque A est fini, $\mathrm{vect}(\mathrm{A})$ n'est autre que l'ensemble des combinaisons linéaires de A.

● **Somme de sous-espaces vectoriels**

$\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \dots, \mathrm{F}_n$ étant des SEV de E, on définit leur somme : $\sum \mathrm{F}_i = \mathrm{vect}\left(\bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{F}_i\right)$.