SYNTHESES DE COURS

Chapitre 1. Algèbre fondamentale (rappels de SUP et compléments)

◆ Groupes

Ce paragraphe est un rappel des notions vues en SUP, quelle que soit la section d'origine.

● Définitions et propriétés

$(G,*)$ est un « groupe » si $*$ est une loi de composition interne, associative, ayant un neutre noté e, tout élément ayant un symétrique. De plus :

- il est « abélien » si la loi est commutative ;
- si G est fini, on parle de « groupe fini » et on appelle « ordre » son cardinal.

Tous les éléments sont « réguliers », on peut simplifier par x : $\begin{cases} a*x = b*x \Rightarrow a = b \\ y*a = y*b \Rightarrow a = b \end{cases}$.

● Sous-groupe

$H \subset G$ est un « sous-groupe de G » si la restriction de la loi de G à H lui confère une structure de groupe.

H sous-groupe de $G \Leftrightarrow H \subset G$, $H \neq \varnothing$, $\forall (x, y) \in H, x * y^{-1} \in H$.

● Morphismes de groupe

Un « morphisme de groupe » est une application de $(G,*)$ dans $(H,\perp)$, deux groupes, qui vérifie : $\forall (x, y) \in G, f(x*y) = f(x) \perp f(y)$. On a les propriétés suivantes :

- l'image du neutre de G est le neutre de H ;
- l'image d'un sous-groupe de G est un sous-groupe de H ;
- l'image réciproque d'un sous-groupe de H est un sous-groupe de G.

$\operatorname{Ker} f = f^{-1}(\{e_F\})$ et $\operatorname{Im} f = f(G)$ sont des sous-groupes, respectivement de G et H.

Théorème : Si f est un morphisme de groupe, on a :

- f injective $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Ker} f = \{e\}$;
- f surjective $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Im} f = H$.

◆ Groupe symétrique

Ce paragraphe a été vu en MPSI mais pas en PCSI ni en PTSI. Il est utilisé pour le cours sur les déterminants.

● Définitions

L'ensemble des bijections de $\{1,\dots,n\}$ dans lui-même est le « groupe des permutations » (ou « groupe symétrique »), noté S_n.

Les permutations qui ne font qu'échanger deux indices sont les « transpositions ». Celles qui font « tourner » une série d'indices sont les « cycles ».

- **Décomposition**

Théorème : Toute permutation peut se décomposer en produit de transpositions (il suffit de procéder « à tâtons »).

Si la décomposition n'est pas unique, le nombre de transpositions figurant dans la décomposition d'une permutation donnée est soit toujours pair, soit toujours impair. Dans le premier cas, la permutation est « de signature 1 » (ou « paire »), dans le second cas elle est « de signature –1 » (ou « impaire »).

L'application $\begin{array}{c}(S_n,\circ)\xrightarrow{\text{Signature}}(\{-1,1\},\times)\\ \sigma\to\text{Signature}(\sigma)\text{ notée }(-1)^{\sigma}\end{array}$ est un morphisme de groupe.

◆ Anneaux

Ce paragraphe est un rappel des notions vues en SUP, quelle que soit la section d'origine.

- **Définitions**

$(\mathrm{A},+,\times)$ est un « anneau » si :

- $(\mathrm{A},+)$ est un groupe abélien (on note son neutre 0) ;
- $\times$ est une loi de composition interne, associative, ayant un neutre noté 1, distributive par rapport à +.

Si en outre tout élément sauf 0 est inversible pour la loi $\times$, $(\mathrm{A},+,\times)$ est un « corps ».

On parle d'anneau ou de corps « commutatifs » si en outre la loi $\times$ est commutative.

- **Propriétés élémentaires**

Règles de calcul : $0\times x=x\times 0=0$, $-(x\times y)=(-x)\times y=x\times(-y)$.

Distributivité étendue : $\sum_{i=1}^{n}x_i\times\sum_{j=1}^{p}y_j=\sum_{i,j\in\{1,\dots,n\}\times\{1,\dots,p\}}x_i\times y_j$.

Binôme de Newton (seulement pour x et y qui **commutent**) :

- $(x+y)^n=\sum_{p=0}^{n}C_n^p x^p y^{n-p}$;
- $x^n-y^n=(x-y)\sum_{p=0}^{n-1}x^p y^{n-1-p}$.

- **Morphisme d'anneau**

Un « morphisme d'anneau » est une application de $(\mathrm{A},+,\ )$ dans $(\mathrm{B},+,\ )$, deux anneaux, qui vérifie : $\forall(x,y)\in\mathrm{A},\begin{cases}f(x+y)=f(x)+f(y)\\ f(xy)=f(x)f(y)\end{cases}$ et $f(1)=1$.

◆ Idéaux de K[X]

Ce paragraphe est utile pour le chapitre sur les polynômes d'endomorphismes.

- **Définitions**

Ces définitions sont hors programme en dehors de l'anneau des polynômes, elles sont données ici à titre purement culturel.

$(\mathrm{A},+,\ )$, anneau commutatif est « intègre » si :

– il est non réduit à $\{0\}$;

– il n'a pas de « diviseur de 0 », i.e. $ab=0 \Rightarrow a=0$ ou $b=0$.

I est un « idéal de $(\mathrm{A},+,\ )$ », anneau commutatif, si :

– $(\mathrm{I},+)$ est un sous-groupe de $(\mathrm{A},+)$;

– I est une partie permise, i.e. $\forall(a,x)\in \mathrm{A}\times\mathrm{I}, ax\in\mathrm{I}$.

- **Cas de K[X]**

$(\mathrm{K}[X],+,\ )$ est un anneau commutatif intègre. De plus, ses seuls idéaux sont les $P_0\mathrm{K}[X]=\{P\in\mathrm{K}[X,\exists Q\in\mathrm{K}[X],P=P_0Q]\}$. Comme de nombreux résultats sur les polynômes, il se démontre aisément grâce à la division euclidienne (cf. exercice 1.08).

■ Chapitre 2. Espaces vectoriels et applications linéaires (rappels de SUP et compléments)

◆ Généralités

Ce paragraphe est un rappel des notions vues en SUP, quelle que soit la section d'origine.

- **Définitions**

$(\mathrm{E},+,\cdot)$ est un « espace vectoriel sur le corps K » si et seulement si $(\mathrm{E},+)$ est un groupe commutatif et $\cdot$ une loi de comp. externe de $\mathrm{K}\times\mathrm{E}$ dans E vérifiant les propriétés de :

– « distributivité mixte » : $a\cdot(\vec{x}+\vec{y})=a\cdot\vec{x}+a\cdot\vec{y}$ et $(a+b)\cdot\vec{x}=a\cdot\vec{x}+b\cdot\vec{x}$;

– « associativité mixte » : $(ab)\cdot\vec{x}=a\cdot(b\cdot\vec{x})$;

– « opérateur neutre » : $1\cdot\vec{x}=\vec{x}$.

$f:\mathrm{E}\to\mathrm{F}$ est une « application linéaire » si et seulement si c'est un morphisme d'espaces vectoriels, i.e. $f(a\vec{x}+b\vec{y})=af(\vec{x})+bf(\vec{y})$.

$B:\mathrm{E}_1\times\mathrm{E}_2\to\mathrm{F}$ est une « application bilinéaire » si et seulement si elle est linéaire par rapport à chaque vecteur, i.e. $B(a\vec{x}_1+b\vec{y}_1,\vec{x}_2)=aB(\vec{x}_1,\vec{x}_2)+bB(\vec{y}_1,\vec{x}_2)$ et $B(\vec{x}_1,a\vec{x}_2+b\vec{y}_2)=aB(\vec{x}_1,\vec{x}_2)+bB(\vec{x}_1,\vec{y}_2)$.

$g:\mathrm{E}_1\times\cdots\times\mathrm{E}_n\to\mathrm{F}$ est une « application n–linéaire » si et seulement si elle est linéaire par rapport à chaque vecteur, i.e. pour tout i, $g(\vec{x}_1,\ldots,a\vec{x}_i+b\vec{y}_i,\ldots,\vec{x}_n)=ag(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_i,\ldots,\vec{x}_n)\ +bg(\vec{x}_1,\ldots,\vec{y}_i,\ldots,\vec{x}_n)$.

$(\mathrm{A},+,\cdot,\times)$ est une « algèbre sur le corps K » si et seulement si $(\mathrm{E},+,\cdot)$ est un espace vectoriel sur K et $(\mathrm{E},+,\times)$ un anneau avec « associativité mixte » entre les deux lois multiplicatives, i.e. $\lambda\cdot(x\times y)=(\lambda\cdot x)\times y=x\times(\lambda\cdot y)$.

- **Exemples fondamentaux**

L'ensemble des applications de A, ensemble quelconque, dans E, K–EV, est un K–EV. En particulier, K étant un corps, sont des K–EV :

– K, $\mathrm{K}\times\mathrm{K}$,…, K^n ;

– $\mathrm{K}[\mathrm{X}]$, ensemble des polynômes sur K et K^{N}, ensemble des suites dans K.

Le produit cartésien de K–EV est un K–EV.

L'ensemble des applications linéaires d'un $K-$EV, E, dans un autre $K-$EV, F, est un $K-$EV, noté $\pounds(E,F)$:

– lorsque $F=K$, on le note E^* : c'est le « dual de E » ;
– lorsque $E=F$, c'est une algèbre pour la loi $\circ$, notée $\pounds(E)$ ou $\mathrm{End}(E)$.

◆ Sous-espace vectoriel

Les trois premiers paragraphes sont un rappel des notions vues en SUP, quelle que soit la section d'origine.

● Définition, caractérisation, intersection

$F\subset E$ est un « sous-espace vectoriel » de E, $K-$EV, si la restriction des lois de E à F lui confère une structure de $K-$EV.

F SEV de E $\Leftrightarrow$ $F\subset E$, $F\neq\varnothing$, $\forall(a,b)\in K$, $\forall(\vec{x},\vec{y})\in F$, $a\vec{x}+b\vec{y}\in F$.

Théorème : l'intersection de SEV est encore un SEV.

● Combinaison linéaire

Soit $A=\{\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_n\}$, une famille finie de vecteurs, toute somme $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\vec{x}_i$ est une « combinaison linéaire » d'éléments de A.

F SEV de E $\Leftrightarrow$ $F\subset E$, $F\neq\varnothing$, et F stable par toute combinaison linéaire.

● Sous-espace vectoriel engendré

$\mathrm{vect}(A)$ est l'intersection de tous les SEV contenant A (c'est donc le plus petit SEV contenant A). Lorsque A est fini, $\mathrm{vect}(A)$ n'est autre que l'ensemble des combinaisons linéaires de A.

● Somme de sous-espaces vectoriels

$F_1,F_2,\ldots,F_n$ étant des SEV de E, on définit leur somme : $\sum F_i=\mathrm{vect}\left(\bigcup_{i=1}^{n}F_i\right)$.

Cette définition équivaut à $\sum F_i=\left\{\sum_{i=1}^{n}\vec{x}_i,(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_n)\in F_1\times\cdots\times F_n\right\}$.

Remarque : en Sup, on se limitait à la somme de deux SEV.

● Somme directe de sous-espaces vectoriels

F_1 et F_2 étant des SEV de E, ils sont « en somme directe » si $F_1\cap F_2=\{\vec{0}\}$. On note alors leur somme $F_1\oplus F_2$. Si $F_1\oplus F_2=E$, ils sont « supplémentaires ».

Par récurrence, on dit que $F_1,F_2,\ldots,F_n$, SEV de E, sont « en somme directe » si $F_1,F_2,\ldots,F_{n-1}$ le sont et si $\bigoplus_{i=1}^{n-1}F_i$ et F_n le sont. On note alors leur somme $\bigoplus_{i=1}^{n}F_i$.

Attention, cela n'équivaut pas à $F_i\cap F_j=\{\vec{0}\}$, $\forall(i,j)$ mais à $F_i\cap\sum_{j\neq i}F_j=\{\vec{0}\}$, $\forall i$.

Si $\bigoplus_{i=1}^{n}F_i=E$, $F_1,F_2,\ldots,F_n$ sont « supplémentaires ».

Remarque : en MPSI, on se limitait encore à la somme de deux SEV, en PCSI ou PTSI la notion de somme directe n'était pas au programme.

- **Exemple**

Dans $\mathrm{K}[X]$, le SEV $P_0\mathrm{K}[X]$ des multiples de P_0 admet comme supplémentaire $\mathrm{K}_{p-1}[X]$ où $p = \deg P_0$.

◆ Familles libres, liées, génératrices, bases

Les notions de familles libres ou génératrices de taille quelconque ne figurent pas explicitement au programme officiel des sections PSI alors qu'elles figurent à celui des MP comme des PC, des PT et des TSI. Il nous a semblé qu'il s'agissait d'une erreur de rédaction, aussi donnons-nous les définitions de ces notions.

- **Familles libres**

$\mathrm{A} = \{\vec{x}_i\}_{i\in I}$ « famille libre » $\Leftrightarrow \left\{ \sum_{\{i_1,\ldots,i_n\}\subset I} \lambda_j \vec{x}_{i_j} \Leftrightarrow \lambda_j \equiv 0 \right\}$ (*en SUP, on se limitait aux familles finies, cela revient à dire ici que toutes ses sous-familles finies sont libres*).

Elle est « liée » dans le cas contraire.

Théorème : Toute sous famille d'une famille libre est libre.

Corollaire : Toute sur famille d'une famille liée est liée.

- **Familles génératrices**

$\mathrm{A} = \{\vec{x}_i\}_{i\in I}$ « famille génératrice » de E $\Leftrightarrow$ vect A = E $\Leftrightarrow \forall \vec{x} \in \mathrm{E}$, $\exists (i_1, i_2, \ldots, i_n) \in I$, $\exists (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathrm{K}$, $\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} a_j \vec{x}_{i_j}$ (*en SUP, on se limitait aux familles finies*).

Théorème : Toute sur famille d'une famille génératrice est génératrice.

Corollaire : Toute sous famille d'une famille non génératrice est non génératrice.

- **Bases**

$\mathrm{A} = \{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n\}$ « base » de E $\Leftrightarrow$ A famille libre et génératrice $\Leftrightarrow \forall \vec{x} \in \mathrm{E}$, $\exists ! (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathrm{K}$, $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{x}_i$ (*dans le programme officiel PSI, la notion de base est explicitement limitée à la dimension finie*).

Les a_i sont les « coordonnées » (ou « composantes ») de $\vec{x}$ dans la base A.

Théorème : une famille libre est génératrice si et seulement si elle est maximale, une famille génératrice est libre si et seulement si elle est minimale.

◆ Applications linéaires

Ce paragraphe est un rappel des notions vues en SUP, quelle que soit la section d'origine.

- **Définitions**

Le « noyau de f » est $\operatorname{Ker} f = \{\vec{x} \in \mathrm{E}, f(\vec{x}) = \vec{0}\}$, c'est un SEV de E.

L'« image de f » est $\operatorname{Im} f = \{\vec{y} \in \mathrm{F}, \exists \vec{x} \in \mathrm{E}, \vec{y} = f(\vec{x})\}$, c'est un SEV de F.

- **Propriétés**

Théorème : l'image et l'image réciproque de tout SEV par une AL sont des SEV.

- **Injection, surjection**

Théorème : f injective $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Ker} f = \{\vec{0}\}$,
f surjective $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Im} f = \mathrm{F}$.

Théorème : f injective $\Leftrightarrow$ l'image de toute fam. libre est une fam. libre,
f surjective $\Leftrightarrow$ l'image de toute famille génératrice est géné.
f bijective $\Leftrightarrow$ l'image de toute base est une base.
$\Leftrightarrow$ l'image d'une base est une base.

Chapitre 3. Espaces vectoriels de dimension finie (rappels de SUP et compléments)

Généralités

Ce paragraphe est un rappel des notions vues en SUP, quelle que soit la section d'origine.

- **Définition**

E, K –EV, est de « dimension finie » s'il admet une partie génératrice finie.

Corollaire : dans un tel K –EV, il existe des bases finies.

- **Lemme fondamental**

Si $n+1$ vecteurs $\{\vec{y}_i\}$ sont engendrés par n vecteurs $\{\vec{x}_j\}$, alors les $\{\vec{y}_i\}$ sont liés .

Il en découle :
- toutes les bases sont finies et ont même nombre d'éléments, qui est la « dimension de l'espace », $\dim \mathrm{E}$;
- les familles libres ont au plus $\dim \mathrm{E}$ éléments, celles qui en ont $\dim \mathrm{E}$ sont les bases ;
- les familles génératrices ont au moins $\dim \mathrm{E}$ éléments, celles qui en ont $\dim \mathrm{E}$ sont les bases.

Existence de bases et de supplémentaires

Ce paragraphe complète les notions vues en SUP.

- **Théorème de la base incomplète**

Théorème : E, K –EV de dimension finie, L famille libre, G famille génératrice, alors $\exists \mathrm{G}' \subset \mathrm{G}$ telle que $\mathrm{L} \cup \mathrm{G}'$ soit une base de E.

Corollaire 1 : $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ base de E, $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p)$ famille libre,
alors $\exists (i_{p+1}, \ldots, i_n)$ / $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p, \vec{e}_{i_{p+1}}, \ldots, \vec{e}_{i_n})$ base de E.

Corollaire 2 : $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p)$ famille libre,
alors $\exists (\vec{x}_{p+1}, \vec{x}_{p+2}, \ldots, \vec{x}_n)$ / $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$ base de E.

- **Supplémentaires**

E, K –EV de dimension finie, F SEV de base $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p)$, le dernier corollaire montre que $\underbrace{\mathrm{vect}(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p)}_{\mathrm{F}} \oplus \mathrm{vect}(\vec{x}_{p+1}, \ldots, \vec{x}_n) = \mathrm{E}$, ce qui assure l'existence d'un supplémentaire à F. La base de E ainsi obtenue est « adaptée » au SEV F.

◆ Propriétés

Ce paragraphe complète les notions vues en SUP.

- **Dimension et SEV**

E, K –EV de dimension finie, F, SEV de E $\Rightarrow$ F de dimension finie avec $\dim \mathrm{F} \leq \dim \mathrm{E}$. L'égalité n'a lieu que si $\mathrm{F} = \mathrm{E}$.

Si F et G sont deux SEV de E, $\mathrm{F} = \mathrm{G} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{F} \subset \mathrm{G} \\ \dim \mathrm{F} = \dim \mathrm{G} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{G} \subset \mathrm{F} \\ \dim \mathrm{G} = \dim \mathrm{F} \end{cases}$.

- **Dimension et somme directe**

E, K –EV de dimension finie, F et F' SEV de E, tels que $\mathrm{F} \cap \mathrm{F}' = \{\vec{0}\}$, de bases respectives B et B' :

– $B \cup B'$ est une base de $\mathrm{F} \oplus \mathrm{F}'$;
– $\dim \mathrm{F} \oplus \mathrm{F}' = \dim \mathrm{F} + \dim \mathrm{F}'$.

En particulier, si F et F' sont supplémentaires :

– $B \cup B'$ base de E, « adaptée à la décomposition » en somme directe $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{F}'$;
– $\dim \mathrm{F} + \dim \mathrm{F}' = \dim \mathrm{E}$.

Plus généralement si $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \ldots, \mathrm{F}_n$ sont supplémentaires avec pour bases respectives $B_1, \ldots, B_n$:

– $\bigcup_{i=1}^{n} B_i$ base de E, dite « adaptée à la décomposition » en somme directe ;
– $\sum_{i=1}^{n} \dim \mathrm{F}_i = \dim \mathrm{E}$.

- **Dimension et somme**

E, K –EV de dimension finie, F et G SEV de E, alors $\dim \mathrm{F} + \mathrm{G} = \dim \mathrm{F} + \dim \mathrm{G} - \dim \mathrm{F} \cap \mathrm{G}$.

- **Exemples fondamentaux**

K^n est de dimension n, de base canonique $\left\{ \left(0, \ldots, 0, \underset{i^{\text{ème}} \text{ rang}}{1}, 0, \ldots, 0 \right) \right\}_{1 \leq i \leq n}$.

$\mathrm{K}[\mathrm{X}]$ et K^{N} sont de dimension infinie.

Si E est de dimension n et de base $(\vec{e}_i)_{i \leq n}$ et F de dimension p et de base $(\vec{\varepsilon}_j)_{j \leq p}$, alors $\pounds(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ est de dimension np et de base $(f_{i,j})_{\substack{i \leq n \\ j \leq p}}$ telles que $f_{i,j}(\vec{e}_k) = \delta_i^k \vec{e}_j$.

◆ Rang

Ce paragraphe complète les notions vues en SUP.

● **Rang d'un système de vecteur**

Le « rang d'un système de vecteurs » est la dimension du SEV qu'il engendre. C'est aussi le nombre maximal de vecteurs libres que l'on peut trouver parmi eux.
Un système est « **régulièrement échelonné** » lorsqu'il s'exprime triangulairement par rapport à un système libre (par exemple une base) :

$$\begin{cases} \vec{x}_1 = a_1^1 \vec{y}_1 + a_2^1 \vec{y}_2 + \cdots\cdots + a_n^1 \vec{y}_n \\ \vec{x}_2 = \qquad a_2^2 \vec{y}_2 + \cdots\cdots + a_n^2 \vec{y}_n \\ \quad \vdots \\ \quad \vdots \\ \vec{x}_p = \qquad\qquad a_p^p \vec{y}_p + \cdots a_n^p \vec{y}_n \end{cases} \quad \text{avec } (\vec{y}_j) \text{ libres et } a_j^j \neq 0.$$

Théorème : le rang d'un tel système est égal au nombre de vecteurs (p).

● **Rang d'une application linéaire**

Le « rang d'une application linéaire f », noté $\text{rang}\, f$, est la dimension de $\text{Im}\, f$.

Théorème : si E ou F est de dimension finie, $\text{Im}\, f$ aussi.

Le rang vérifie l'inégalité triangulaire : $|\text{rg}\, f - \text{rg}\, g| \leq \text{rg}(f+g) \leq \text{rg}\, f + \text{rg}\, g$ ainsi que $\text{rg}\, f \circ g \leq \min(\text{rg}\, f, \text{rg}\, g)$.

● **Théorème du rang**

f AL de E, K –EV de dimension finie, dans F, K –EV de dimension quelconque.

Théorème fondamental : si $\text{E}' \oplus \text{Ker}\, f = \text{E}$, alors f bijection de E' dans $\text{Im}\, f$ (valable même si E est de dimension infinie).
Corollaires (si E de dimension finie) :

– $\dim \text{Ker}\, f + \dim \text{Im}\, f = \dim \text{E}$ (théorème ou formule du rang) ;
– f injective $\Leftrightarrow$ $\dim \text{Ker}\, f = 0 \Leftrightarrow \text{rang}\, f = \dim \text{E}$;
– f surjective $\Leftrightarrow$ $\text{rg}\, f = \dim \text{F}$;
– f bijective $\Leftrightarrow$ $\text{rg}\, f = \dim \text{E} = \dim \text{F}$.

En particulier si $\dim \text{E} = \dim \text{F}$, f injective $\Leftrightarrow$ f surjective $\Leftrightarrow$ f bijective.

■ Chapitre 4. Dualité en dimension finie

Hors mis le premier paragraphe dont les résultats et les définitions sont valables quelle que soit la dimension, ce chapitre ne s'intéresse qu'aux EV de dimensions finies.

◆ Formes linéaires, hyperplans

● **Définition**

E étant un K –EV :
– une application linéaire de E dans K est une « forme linéaire » ;
– un SEV de E supplémentaire d'une droite vectorielle est un « hyperplan ».