

Table des matières

| | | |
|----------|--|-----------|
| I | Analyse | 3 |
| 1 | Révisions | 5 |
| 1 | Rappels | 5 |
| 1.1 | Quotients | 5 |
| 1.2 | Puissances | 6 |
| 1.3 | Propriétés des inégalités dans \mathbb{R} | 6 |
| 1.4 | Inégalités, carrés et inverses | 7 |
| 1.5 | Valeur absolue | 7 |
| 1.6 | Racines carrées | 7 |
| 1.7 | Partie entière | 8 |
| 1.8 | La fonction trinôme du second degré | 8 |
| 1.9 | Signe d'un produit ; d'une somme | 8 |
| 1.10 | Fonction logarithme népérien | 9 |
| 1.11 | Fonction exponentielle de base e | 9 |
| 1.12 | Fonction exponentielle et fonction puissance | 9 |
| 2 | Calculer avec des quotients | 10 |
| 3 | Calculer avec des puissances | 11 |
| 4 | Calculer avec des valeurs absolues | 12 |
| 5 | Calculer avec des radicaux | 13 |
| 6 | Résoudre des (in)équations avec des radicaux | 14 |
| 7 | Démontrer avec des parties entières | 15 |
| 8 | Résoudre des équations de degré ≤ 2 | 16 |
| 9 | Résoudre des inéquations de degré ≤ 2 | 17 |
| 10 | Résoudre une équation avec ln ou exp | 18 |
| 11 | Résoudre une inéquation avec ln ou exp | 19 |
| 12 | Etude de fonctions | 20 |
| 13 | Exercices | 21 |
| 13.1 | Exercices d'entraînement | 21 |
| 13.2 | Exercices de perfectionnement | 35 |
| 2 | Récurrence | 39 |
| 1 | Rappels | 39 |
| 1.1 | Le raisonnement par récurrence | 39 |
| 1.2 | Calcul de sommes | 41 |
| 1.3 | Propriétés des sommes | 41 |
| 1.4 | Transformation des sommes | 41 |
| 2 | Le raisonnement par récurrence faible | 42 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 3 | Des récurrences et des sommes | 43 |
| 4 | Le raisonnement par récurrence double | 44 |
| 5 | Le raisonnement par récurrence forte | 45 |
| 6 | Calcul de sommes simples | 46 |
| 7 | Calcul de sommes doubles | 47 |
| 8 | Exercices | 48 |
| | 8.1 Exercices d'entraînement | 48 |
| | 8.2 Exercices de perfectionnement | 61 |
| 3 | Suites | 65 |
| 1 | Rappels | 65 |
| | 1.1 Définitions | 65 |
| | 1.2 Quelques résultats | 65 |
| | 1.3 Théorèmes sur les limites | 66 |
| | 1.4 Suites particulières | 66 |
| | 1.5 Théorèmes | 67 |
| | 1.6 Comparaison des suites | 67 |
| | 1.7 Factorielles | 67 |
| 2 | Montrer qu'une suite est croissante | 68 |
| 3 | Déterminer la limite de (u_n) | 69 |
| 4 | Montrer qu'une suite u converge | 70 |
| 5 | Montrer que u et v sont adjacentes | 71 |
| 6 | Utiliser une suite auxiliaire | 72 |
| 7 | Etudier une suite récurrente linéaire d'ordre 2 | 73 |
| 8 | Etudier une suite définie par une équation | 74 |
| 9 | Exercices | 75 |
| | 9.1 Exercices d'entraînement | 75 |
| | 9.2 Exercices de perfectionnement | 86 |
| 4 | Dérivabilité | 95 |
| 1 | Rappels | 95 |
| | 1.1 Limites et continuité en un point | 95 |
| | 1.2 Relations de comparaison | 96 |
| | 1.3 Continuité sur un intervalle | 97 |
| | 1.4 Dérivabilité | 97 |
| | 1.5 Les nouveaux théorèmes | 98 |
| | 1.6 Dérivée n-ième | 98 |
| | 1.7 Convexité | 98 |
| | 1.8 Asymptotes | 98 |
| 2 | Déterminer des limites | 99 |
| 3 | Déterminer un équivalent de f en x_0 | 100 |
| 4 | Montrer qu'une fonction f est continue en x_0 | 101 |
| 5 | Montrer que f est dérivable en x_0 | 102 |
| 6 | Montrer que l'équation $f(x)=0$ a une solution | 103 |
| 7 | Montrer que f réalise une bijection | 104 |
| 8 | Utiliser l'inégalité des accroissements finis | 105 |
| 9 | Calculer la dérivée nième | 106 |
| 10 | Détermination des asymptotes "obliques" | 107 |
| 11 | Etudier la position d'une courbe | 108 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 12 | Etudier la fonction f | 109 |
| 13 | Montrer que la fonction f est convexe sur I | 110 |
| 14 | Exercices | 111 |
| | 14.1 Exercices d'entraînement | 111 |
| | 14.2 Exercices de perfectionnement | 132 |
| 5 | Intégration | 137 |
| 1 | Rappels | 137 |
| | 1.1 Propriétés | 137 |
| 2 | Calculer une intégrale par une primitive de f | 139 |
| 3 | Faire une intégration par parties | 140 |
| 4 | Utiliser un changement de variable | 141 |
| 5 | Calculer une intégrale de fonction rationnelle | 142 |
| 6 | Prouver des inégalités entre intégrales | 143 |
| 7 | Etudier une suite d'intégrales | 144 |
| 8 | Etudier une fonction définie par une intégrale | 145 |
| 9 | Limite de sommes et intégrales | 146 |
| 10 | Exercices | 147 |
| | 10.1 Exercices d'entraînement | 147 |
| | 10.2 Exercices de perfectionnement | 157 |
| 6 | Séries | 169 |
| 1 | Rappels | 169 |
| | 1.1 Définitions et théorèmes | 169 |
| | 1.2 Séries à termes de signe variable | 169 |
| | 1.3 Séries à termes positifs | 170 |
| | 1.4 Séries particulières | 170 |
| 2 | Calculer la somme de séries convergentes | 171 |
| | 2.1 Obtenir une somme classique par factorisation | 171 |
| | 2.2 Des sommes classiques par décomposition en somme | 172 |
| 3 | Etudier la convergence d'une série | 173 |
| | 3.1 Etude de la convergence de la somme partielle (S_n) | 173 |
| | 3.2 Spécial séries à termes positifs | 174 |
| 4 | Séries à termes de signe variable | 175 |
| 5 | Exercices | 176 |
| | 5.1 Exercices d'entraînement | 176 |
| | 5.2 Exercices de perfectionnement | 186 |
| 7 | Fonction de deux variables | 197 |
| 1 | Rappels | 197 |
| | 1.1 L'ensemble \mathbb{R}^2 | 197 |
| | 1.2 Graphes | 197 |
| | 1.3 Limite; Continuité | 198 |
| | 1.4 Dérivabilité | 198 |
| 2 | Déterminer l'ensemble de définition de f | 199 |
| 3 | Etudier l'existence d'une limite L en (a, b) | 200 |
| 4 | Déterminer les dérivées partielles | 201 |
| 5 | Etudier l'existence d'un extremum | 202 |
| 6 | Exercices | 203 |

| | | |
|-----------|---|------------|
| 6.1 | Exercices d'entraînement | 203 |
| 6.2 | Exercices de perfectionnement | 215 |
| 8 | Polynômes | 221 |
| 1 | Rappels | 221 |
| 1.1 | Définitions | 221 |
| 1.2 | Racine d'un polynôme | 222 |
| 1.3 | Dérivation | 222 |
| 1.4 | L'espace vectoriel des polynômes | 222 |
| 2 | Factoriser un polynôme | 223 |
| 2.1 | En utilisant des identités remarquables | 223 |
| 2.2 | Quand on connaît une racine | 224 |
| 3 | Déterminer P vérifiant une propriété \mathcal{P}_1 | 225 |
| 4 | Exercices | 226 |
| 4.1 | Exercices d'entraînement | 226 |
| 4.2 | Exercices de perfectionnement | 232 |
| II | Algèbre | 235 |
| 9 | Systemes | 237 |
| 1 | Rappels | 237 |
| 1.1 | Les opérations élémentaires sur les systèmes | 237 |
| 1.2 | Système de n équations à n inconnues | 238 |
| 1.3 | Plus d'équations que d'inconnues : $n > p$ | 238 |
| 1.4 | Plus d'inconnues que d'équations : $n < p$ | 238 |
| 2 | Autant d'équations que d'inconnues | 239 |
| 3 | Plus d'équations que d'inconnues | 240 |
| 4 | Plus d'inconnues que d'équations | 241 |
| 5 | Résoudre un système paramétrique | 242 |
| 6 | Exercices | 243 |
| 6.1 | Exercices d'entraînement | 243 |
| 6.2 | Exercices de perfectionnement | 250 |
| 10 | Matrices | 253 |
| 1 | Rappels | 253 |
| 1.1 | Définitions | 253 |
| 1.2 | Matrices carrées | 254 |
| 1.3 | Systemes et matrices | 254 |
| 2 | Calculer avec des matrices explicitées | 255 |
| 3 | Résoudre une équation dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ | 256 |
| 4 | Calculer avec des matrices non explicitées | 257 |
| 5 | Calculer A^p pour $p \in \mathbb{N}$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$ | 258 |
| 5.1 | Quelques cas particuliers | 258 |
| 5.2 | Conjecture puis récurrence | 259 |
| 5.3 | Utilisation de la formule du binôme | 260 |
| 5.4 | Utilisation de suites | 261 |
| 5.5 | Utilisation d'une matrice diagonale | 262 |
| 6 | Résoudre un système en utilisant une matrice | 263 |

| | | |
|------------|--|------------|
| 7 | Déterminer l'inverse d'une matrice A inversible | 264 |
| 7.1 | Cas où on dispose d'une relation du type $P(A) = 0$ | 264 |
| 7.2 | Calcul de l'inverse par résolution d'un système | 265 |
| 7.3 | Calcul de l'inverse par la méthode du pivot | 266 |
| 8 | Exercices | 267 |
| 8.1 | Entraînement | 267 |
| 8.2 | Perfectionnement | 282 |
| 11 | Espaces vectoriels | 291 |
| 1 | Rappels | 291 |
| 1.1 | Définitions | 291 |
| 2 | Montrer que u est combinaison linéaire de u_1, \dots, u_n | 294 |
| 3 | Montrer que F est un espace vectoriel | 295 |
| 4 | La famille $\mathcal{F} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ est-elle libre ou liée? | 296 |
| 5 | La famille $\mathcal{F} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ engendre-t-elle E ? | 297 |
| 6 | $\mathcal{F} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_p)$ est-elle une base de E ? | 298 |
| 7 | Déterminer une base de F | 299 |
| 8 | Exercices | 300 |
| 8.1 | Exercices d'entraînement | 300 |
| 8.2 | Perfectionnement | 307 |
| 12 | Applications linéaires | 313 |
| 1 | Rappels | 313 |
| 1.1 | Applications linéaires | 313 |
| 1.2 | Noyau et image | 314 |
| 1.3 | Image d'une famille de vecteurs | 314 |
| 1.4 | En dimension finie | 314 |
| 1.5 | Matrice d'une application linéaire | 314 |
| 1.6 | Matrice d'un endomorphisme | 315 |
| 2 | Montrer qu'une application est linéaire | 316 |
| 3 | Déterminer $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ | 317 |
| 3.1 | E n'est pas de dimension finie | 317 |
| 3.2 | E est de dimension finie | 318 |
| 4 | Déterminer le rang d'une application linéaire | 319 |
| 5 | Montrer que f est isomorphisme de E dans F | 320 |
| 5.1 | Cas où la dimension n'est pas finie | 320 |
| 5.2 | En dimension finie avec $\dim(E) = \dim(F) = n$ | 321 |
| 6 | Démontrer que A est inclus dans B | 322 |
| 7 | Prouver une implication, une équivalence | 323 |
| 8 | Exercices | 324 |
| 8.1 | Exercices d'entraînement | 324 |
| 8.2 | Perfectionnement | 337 |
| III | Probabilités | 345 |
| 13 | Dénombrément | 347 |
| 1 | Rappels | 347 |
| 1.1 | Ensembles | 347 |

| | | |
|-----------|--|------------|
| 1.2 | Applications | 348 |
| 1.3 | Calcul | 348 |
| 2 | Calculer une somme contenant des combinaisons | 349 |
| 3 | Résoudre un exercice de dénombrement | 350 |
| 4 | Déterminer le nombre d'applications | 351 |
| 5 | Exercices | 352 |
| 5.1 | Exercices d'entraînement | 352 |
| 5.2 | Exercices de perfectionnement | 360 |
| 14 | Probabilités | 365 |
| 1 | Rappels | 365 |
| 1.1 | Le langage des probabilités | 365 |
| 1.2 | Propriétés importantes | 366 |
| 1.3 | Probabilité conditionnelle | 367 |
| 2 | Calculer une probabilité par le dénombrement | 368 |
| 3 | Calculer une probabilité grâce aux axiomes | 369 |
| 4 | Utiliser les probabilités conditionnelles | 370 |
| 5 | Utiliser le théorème des probabilités totales | 371 |
| 6 | Exercices | 372 |
| 6.1 | Exercices d'entraînement | 372 |
| 6.2 | Exercices de perfectionnement | 386 |
| 15 | Variable aléatoire | 391 |
| 1 | Rappels | 391 |
| 1.1 | Définitions | 391 |
| 1.2 | Loi de probabilité d'une v.a. | 391 |
| 1.3 | Espérance d'une v.a. | 392 |
| 1.4 | Moment d'ordre r | 392 |
| 1.5 | Variance d'une v.a. discrète X | 393 |
| 1.6 | Lois classiques | 393 |
| 2 | Déterminer la loi d'une v.a. finie | 394 |
| 3 | Utiliser le théorème des probabilités totales | 395 |
| 4 | Calculer $P(X=k)$, $E(X)$ ou $V(X)$: cas fini | 396 |
| 5 | Calculer $P(X=k)$, $E(X)$ ou $V(X)$: cas infini | 397 |
| 6 | Etudier une variable classique | 398 |
| 7 | Exercices | 399 |
| 7.1 | Exercices d'entraînement | 399 |
| 7.2 | Exercices de perfectionnement | 413 |
| 16 | Couples de variables aléatoires | 419 |
| 1 | Rappels | 419 |
| 1.1 | Définitions : les variables sont supposées discrètes | 419 |
| 1.2 | Indépendance de deux v.a. | 419 |
| 1.3 | Fonction de deux v.a. | 420 |
| 1.4 | Covariance | 420 |
| 2 | Représenter la loi conjointe dans un tableau | 421 |
| 3 | Donner la loi conjointe puis les lois de X et Y | 422 |
| 4 | Déterminer les lois de X et de Y | 423 |
| 5 | Déterminer la loi de $X+Y$, XY , | 424 |

| | | |
|-----|---|-----|
| 6 | Exercices | 425 |
| 6.1 | Exercices d'entraînement | 425 |
| 6.2 | Exercices de perfectionnement | 437 |