Chapitre 1

Nombres complexes

1 Rappels

1.1 Définitions et règles de calcul

Un nombre complexe s'écrit sous sa **forme algébrique** : $z = a + bi$ où $\underline{(a, b) \in \mathbb{R}^2}$.
a est la **partie réelle** : $a = \mathrm{Re}(z)$.
b est la **partie imaginaire** : $b = \mathrm{I}m(z)$.
$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow b = 0$. $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow a = 0$: dans ce cas, z est un imaginaire pur $ib, b \in \mathbb{R}$.

Soit $a + ib$ la forme algébrique de z ; $a + ib = 0 \Leftrightarrow a = 0$ et $b = 0$.
Soit $a' + ib'$ la forme algébrique de z' ; $a' + ib' = a + ib \Leftrightarrow a = a'$ et $b = b'$.

Addition et multiplication ont les mêmes propriétés dans $\mathbb{C}$ et dans $\mathbb{R}$.
Il faudra simplement tenir compte du fait que $i^2 = -1$.
Notamment, on a : $zz' = 0 \Leftrightarrow z = 0$ ou $z' = 0$.

Une proposition du type $z < z'$ n'a aucun sens : il n'y a pas d'ordre dans $\mathbb{C}$.

1.2 Représentation d'un nombre complexe

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(\mathrm{O}, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ à tout nombre complexe $z = a + bi, (a, b) \in \mathbb{R}^2$, on associe son **image** : le point M de coordonnées (a, b).
On lui associe aussi son **image vectorielle** : le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{V}}$ de coordonnées (a, b).

A tout point M du plan, de coordonnées (a, b), on associe son **affixe** : $z = a + ib$.
A tout vecteur $\overrightarrow{\mathrm{V}}$ de coordonnées (a, b), on associe son **affixe** : $z = a + ib$.

L'axe des abscisses est appelé **l'axe des réels** : les images des réels sont les points de cet axe.
L'axe des ordonnées est appelé **l'axe des imaginaires purs** : les images des imaginaires purs sont les points de cet axe.

1.3 Conjugué d'un nombre complexe

Le **conjugué** de $z = a + ib, \underline{(a, b) \in \mathbb{R}^2}$, est : $\overline{z} = a - ib$.

L'image M' de $\overline{z}$ est la symétrique de l'image M de z par rapport à l'axe des x.

Les trois propriétés suivantes se lisent sur un graphique :
$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$ $\qquad$ $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z = -\overline{z}$
$\overline{\overline{z}} = z$: l'application $\varphi : z \mapsto \overline{z}$ est une involution ; $\varphi_o\varphi = id_{\mathbb{C}}$ et $\varphi^{-1} = \varphi$.

$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ $\qquad$ $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$ $\qquad$ $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ $\qquad$ $\overline{i} = -i$ $\qquad$ Si $\lambda \in \mathbb{R},\ \overline{\lambda} = \lambda$.

$z + \overline{z} = 2\mathrm{R}e(z)$ $\qquad$ $z - \overline{z} = 2i\mathrm{I}m(z)$

$z\overline{z} = a^2 + b^2$: c'est un réel positif.
L'inverse du nombre complexe z est : $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{a^2 + b^2}$.

1.4 Module d'un nombre complexe

Le **module** de $z = a + ib, (a, b) \in \mathbb{R}^2$, est le réel positif : $\underline{|z| = \sqrt{a^2 + b^2}}$.

Si M est l'image de z, $\underline{|z| = \mathrm{OM}}$.
Si $\overrightarrow{\mathrm{V}}$ est l'image vectorielle de z, $\underline{|z| = \|\overrightarrow{\mathrm{V}}\|}$.

Les quatre propriétés suivantes se lisent sur un graphique : $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
$|\overline{z}| = |z|$ $\qquad$ $|\mathrm{R}e(z)| \leqslant |z|$ $\qquad$ $|\mathrm{I}m(z)| \leqslant |z|$

L'inégalité triangulaire : $||z| - |z'|| \leqslant |z + z'| \leqslant |z| + |z'|$.

$|zz'| = |z||z'|$ $\qquad$ $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$ $\qquad$ $\boxed{z\overline{z} = |z^2|}$ $\qquad$ $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$.
Si z est réel, son module n'est autre que sa valeur absolue en tant que réel.

1.5 Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Soit $\underline{z \neq 0}$, d'image M ; on appelle **argument de z** toute mesure de $(\widehat{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{\mathrm{OM}}})$.

Si θ est l'un de ces nombres, on écrit : $argz = \theta$; c'est une égalité modulo 2π.
La mesure de l'angle qui appartient à $]-\pi; \pi]$ est la **mesure principale**.

Tout complexe non nul a une **forme trigonométrique** : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$,
où r est son module et θ un argument. **r doit être strictement positif !**

Si on connaît la forme algébrique : $z = a + ib$, on obtient la forme trigonométrique par les relations : $\boxed{r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad ; \quad \cos\theta = \dfrac{a}{r} \quad ; \quad \sin\theta = \dfrac{b}{r}}$.

Un réel positif non nul a pour argument 0. Un réel négatif a pour argument π.
Un imaginaire pur non nul a pour argument $\dfrac{\pi}{2}$ ou $-\dfrac{\pi}{2}$.

Si $r \neq 0$, $\boxed{r(\cos\theta + i\sin\theta) = r'(\cos\theta' + i\sin\theta') \Leftrightarrow r = r' \text{ et } \theta = \theta' + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}}$.

1.6 Propriétés des arguments

Définition : $\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$. On a donc $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$.

$arg(zz') = argz + argz' \quad [2\pi]$

$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad arg(z^n) = n.argz \quad [2\pi]$.

$arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = argz - argz' \quad [2\pi]$

$arg\dfrac{1}{z} = -argz \quad [2\pi]$

$e^{i\theta}.e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$.

$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad (e^{i\theta})^n = e^{ni\theta}$.

$\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$.

$\dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$.

$z \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow argz = 0 \quad [2\pi]$

$z \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow argz = 0 \quad [\pi]$

$arg(-z) = \pi + argz \quad [2\pi]$

$z \in \mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow argz = \pi \quad [2\pi]$

$z \in i\mathbb{R}^* \Leftrightarrow argz = \dfrac{\pi}{2} \quad [\pi]$

$arg\overline{z} = -argz \quad [2\pi]$.

1.7 Formules de trigonométrie

$\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$

$\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$

$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a$

$\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a.\tan b}$

$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$

$\sin(a-b) = \sin a\cos b - \sin b\cos a$

$\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a.\tan b}$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$\sin 2x = 2\sin x\cos x$

$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$

$\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$

$\cos a\cos b = \dfrac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$

$\sin a\cos b = \dfrac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$

$\cos p + \cos q = 2\cos\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$

$\sin a\sin b = \dfrac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$

$\sin p + \sin q = 2\sin\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$

$\cos p - \cos q = -2\sin\dfrac{p+q}{2}\sin\dfrac{p-q}{2}$

1.8 Les complexes et la géométrie

Affixe du milieu I de [AB] : $\dfrac{z_A + z_B}{2}$.

Affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$: $z_B - z_A$.

Distance : $AB = |z_B - z_A|$.

Angle orienté : $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = arg\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.

1.9 Equation du second degré $az^2 + bz + c = 0$

L'équation a toujours deux solutions dans $\mathbb{C}$: $z' = \dfrac{-b-\delta}{2a}$ et $z'' = \dfrac{-b+\delta}{2a}$ où δ est l'une des deux racines carrées de $\Delta = b^2 - 4ac$.

1.10 Racines n-ièmes, $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$

Le nombre 1 a n racines n-ièmes : $e^{i\frac{2k\pi}{n}}, n \in [\![0; n-1]\!]$. Leur somme est 0.

2 Passer d'une forme à une autre

Méthode : • En écrivant $z = \dfrac{a+ib}{c+id} = \dfrac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)}$, où a, b, c, d sont réels, on obtient la forme algébrique de z.
• Cas particulier : $z = \dfrac{a+ib}{id} = \dfrac{-i(a+ib)}{d}$.
• Si $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, on obtient la forme algébrique $a+ib$ par les formules $a = r\cos\theta$, $b = r\sin\theta$.
• Si $z = a+ib, (a,b)$ réels, on obtient la forme trigonométrique en utilisant : $r = \sqrt{a^2+b^2}, \cos\theta = \dfrac{a}{r}, \sin\theta = \dfrac{b}{r}$.

Exemple 1 - Mettre sous la forme algébrique : $z_1 = \dfrac{5+4i}{3-2i}$.

2 - Même question pour : $z_2 = (1-2i)^3 + 3(1+i)^2$ et $z_3 = \left(\dfrac{1-4i}{2+i}\right)^2 + \dfrac{1+i}{1-i}$.

---

1 - $z_1 = \dfrac{(5+4i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \dfrac{7+22i}{13}$; $\boxed{z_1 = \dfrac{7}{13} + \dfrac{22}{13}i}$.

2 - $z_2 = 1^3 - 3\times 1^2 \times 2i + 3\times 1 \times (2i)^2 - (2i)^3 + 3(1+2i-1)$
$z_2 = 1 - 6i - 12 + 8i + 6i$; $\boxed{z_1 = -11 + 8i}$.

$z_3 = \left(\dfrac{1-4i}{2+i}\right)^2 + \dfrac{1+i}{1-i} = \dfrac{(1-4i)^2}{(2+i)^2} + \dfrac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}$.
$z_3 = \dfrac{1-8i-16}{4+4i-1} + \dfrac{1+2i-1}{2} = \dfrac{-15-8i}{3+4i} + i = \dfrac{(-15-8i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} + i$
$z_3 = \dfrac{-77+36i}{25} + i = \dfrac{-77+36i}{25} + \dfrac{25i}{25} = \dfrac{-77+61i}{25}$; $\boxed{z_3 = -\dfrac{77}{25} + \dfrac{61}{25}i}$.

Exemple 1 - $z_5 = \sqrt{2} - i\sqrt{6}$ et $z_6 = -3\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$; forme trigonométrique ?
2 - Mettre sous la forme algébrique : $z_7 = (\sqrt{3}+i)^{13}$.

---

1 - $r = \sqrt{\sqrt{2}^2 + \sqrt{6}^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$; $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{-\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
On a donc $\theta = -\dfrac{\pi}{3}$ et la forme trigonométrique est : $\underline{z_5 = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}}$.

Un petit piège : cela ressemble à la forme trigonométrique, mais -3 ne peut pas être le module de z_6 puisqu'il est négatif ! On écrit donc :
$z_6 = 3\left(-\cos\dfrac{\pi}{4} - i\sin\dfrac{\pi}{4}\right) = 3\left(\cos\dfrac{5\pi}{4} + i\sin\dfrac{5\pi}{4}\right)$. On a donc $\underline{z_6 = 3e^{i\frac{5\pi}{4}}}$.

2 - Il n'est pas question de développer cette puissance treizième !
Déterminons d'abord la forme trigonométrique de $\sqrt{3}+i$:
$r = \sqrt{3+1} = 2$; $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{1}{2}$, donc $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ et $\sqrt{3}+i = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$.
On a alors $z_7 = (\sqrt{3}+i)^{13} = (2e^{i\frac{\pi}{6}})^{13} = 2^{13}e^{i\frac{13\pi}{6}} = 2^{13}e^{i\frac{\pi}{6}}$ soit $\underline{z_7 = 2^{12}(\sqrt{3}+i)}$.

Pour s'entraîner : exercices 1, 2, 3, 4, 6.

3 Résoudre une équation de degré un ou deux

Méthode : • Equation $az+b=0$, $a \neq 0$: 1 solution : $z = -\dfrac{b}{a}$; on présente alors le résultat sous la forme algébrique.
• Equation $az^2+bz+c=0$, $a \neq 0$: calculer les racines de Δ en écrivant $(\alpha+i\beta)^2 = \Delta$ et en résolvant le système obtenu après adjonction de l'équation $\alpha^2+\beta^2 = |\Delta|$.
Appliquer alors les formules du cours.

Exemple 1 - Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(z-1+i)^2+1-4i = (z-i)^2+2-i$.

2 - Résoudre dans $\mathbb{C}^2$ le système : $\begin{cases} (1+i)z - z' = 8i \\ (3-2i)z + (1-i)z' = -2+7i \end{cases}$

3 - Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^2 + (z-2+i)^2 = 0$.

4 - Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations : $(1+i)z^2 - iz - 1 = 0$ et $2z^2+z+1=0$.

---

1 - Développons : $z^2+1-1-2z+2iz-2i+1-4i = z^2-2iz-1+2-i$, soit : $(-2+2i)z+1-6i = -2iz+1-i$, soit $(-2+4i)z = 5i$, donc $z = \dfrac{5i}{-2+4i}$.

$z = \dfrac{5i(-2-4i)}{(-2+4i)(-2-4i)} = \dfrac{20-10i}{20} = 1 - \dfrac{1}{2}i$. $\boxed{\mathrm{S} = \{1 - \frac{1}{2}i\}}$

2 - Procédons par substitution : $\begin{cases} (1+i)z - 8i = z' \\ (3-2i)z + (1-i)[(1+i)z-8i] = -2+7i \end{cases} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} (1+i)z - 8i = z' \\ (5-2i)z = 6+15i \end{cases}$. On obtient $z = \dfrac{6+15i}{5-2i} = \dfrac{(6+15i)(5+2i)}{(5-2i)(5+2i)} = \dfrac{87i}{29} = 3i$.

On obtient alors $z' = (1+i)3i - 8i = -3-5i$. $\boxed{\mathrm{S} = \{(3i, -3-5i)\}}$.

3 - L'équation s'écrit : $z^2 - i^2(z-2+i)^2 = 0$; le 1er membre est de la forme a^2-b^2. Elle s'écrit : $[z - i(z-2+i)][z+i(z-2+i)] = 0$ et se ramène à 2 équations du 1er degré : $z - i(z-2+i) = 0$ et $z + i(z-2+i) = 0$. On obtient $z(1-i) = -1-2i$ et $z(1+i) = 1+2i$, puis en passant à la forme algébrique : $\boxed{\mathrm{S} = \{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i, \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i\}}$.

4 - • $\Delta = -1+4(1+i) = 3+4i$; cherchons $a+ib$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, tels que : $(a+ib)^2 = \Delta$, soit $a^2-b^2+2iab = 3+4i$. On a donc le système : $\begin{cases} a^2-b^2 = 3 \quad (1) \\ 2ab = 4 \quad (2) \\ a^2+b^2 = \sqrt{4^2+3^2} = 5 \quad (3) \end{cases}$

En additionnant, puis en soustrayant membre à membre les équations (1) et (3), on obtient : $2a^2 = 8$ et $2b^2 = 2$. L'équation (2) montre que a et b sont de même signe, donc les deux racines de Δ sont $\delta = 2+i$ et $-\delta$. L'ensemble des solutions est donc : $\mathrm{S} = \{\dfrac{i+2+i}{2+2i}, \dfrac{i-2-i}{2+2i}\} = \{1, \dfrac{-1}{1+i}\}$, soit $\boxed{\mathrm{S} = \{1, -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\}.}$

• L' équation a ses coefficients réels. $\Delta = 1-8 = -7$; les racines de $\Delta = 7i^2$ sont $i\sqrt{7}$ et $-i\sqrt{7}$. Les solutions sont donc $\boxed{z_1 = \dfrac{-1+i\sqrt{7}}{4}}$ et $\boxed{z_2 = \overline{z_1} = \dfrac{-1-i\sqrt{7}}{4}}$.

Pour s'entraîner : exercices 4, 7.

4 Déterminer les racines nièmes de Z

Méthode : Ecrire l'égalité $z^n = \mathrm{Z}$ en utilisant la forme trigonométrique : $r^n e^{in\alpha} = \mathrm{R}e^{i\theta}$, puis écrire que modules et arguments sont égaux : $r^n = \mathrm{R}$ et $n\alpha = \theta \quad [2\pi]$.

Exemple Déterminer les racines cubiques de -1 : forme trigonométrique et forme algébrique.

Soit $z = re^{i\alpha}$; l'équation $z^3 = -1$ s'écrit $r^3 e^{3i\alpha} = e^{i\pi}$. On a donc $r^3 = 1$, donc $r = 1$ et $3\alpha = \pi + 2k\pi$, soit $\alpha = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2k\pi}{3}$, où k prend trois valeurs entières consécutives, par exemple 0, 1, 2. Les racines cubiques de -1 sont $\boxed{e^{i\frac{\pi}{3}}, e^{i\pi}, e^{5i\frac{\pi}{3}}}$, soit sous forme algébrique : $\boxed{\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -1, \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$.

Exemple Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^6 = 64j$, où $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.
On ne donnera que les formes trigonométriques.

En posant $z = re^{i\alpha}$, l'équation s'écrit : $r^6 e^{i6\alpha} = 64e^{i\frac{2\pi}{3}}$.
On a donc $r^6 = 64$, donc r=2 et $6\alpha = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$, soit $\alpha = \dfrac{\pi}{9} + \dfrac{2k\pi}{6}$.
On obtient les 6 racines sixièmes de $64j$ en donnant à k les valeurs 0,1,2,3,4,5 par exemple. Ce sont : $\boxed{2e^{i\frac{\pi}{9}}, 2e^{i\frac{4\pi}{9}}, 2e^{i\frac{7\pi}{9}}, 2e^{i\frac{10\pi}{9}}, 2e^{i\frac{13\pi}{9}}, 2e^{i\frac{16\pi}{9}}}$.

Exemple Résoudre dans $\mathbb{C}$; $z^8 - (1+2i)z^4 + 3(1+i) = 0$.

Posons $\mathrm{Z} = z^4$; l'équation s'écrit alors $\mathrm{Z}^2 - (1+2i)\mathrm{Z} + 3(1+i) = 0$.
$\Delta = (1+2i)^2 - 12(1+i) = 1 + 4i - 4 - 12 - 12i = -15 - 8i$; cherchons ses racines.
$\begin{cases} a^2 - b^2 = -15 \\ a^2 + b^2 = 17 \\ 2ab = -8 \end{cases}$ En additionnant puis en soustrayant les deux premières équations, on obtient $a^2 = 1$ et $b^2 = 16$; comme $ab < 0$, les racines sont $1-4i$ et $-1+4i$.
Les solutions sont : $\mathrm{Z}' = \dfrac{1+2i+1-4i}{2} = 1 - i$ et $\mathrm{Z}'' = \dfrac{1+2i-1+4i}{2} = 3i$.

Il s'agit alors de résoudre l'équation : $z^4 = 1 - i = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$: en posant $z = re^{i\alpha}$, l'équation s'écrit : $r^4 e^{4i\alpha} = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$ et on a donc $r^4 = \sqrt{2}$, soit $r = \sqrt[4]{\sqrt{2}} = \sqrt[8]{2}$ et $4\alpha = -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$, soit $\alpha = -\dfrac{\pi}{16} + \dfrac{2k\pi}{4}$; les solutions sont donc $\boxed{\sqrt[8]{2}e^{-i(\frac{\pi}{16} + \frac{2k\pi}{4})}}$.
Il y a 4 solutions qui sont les racines quatrièmes de $1 - i$ et qu'on obtient en donnant à k les valeurs $0, 1, 2, 3$.

On résout de même l'équation $z^4 = 3i = 3e^{i\frac{\pi}{2}}$ dont les solutions sont $\boxed{\sqrt[4]{3}e^{i(\frac{\pi}{8} + \frac{2k\pi}{4})}}$ et qui sont les quatre racines quatrièmes de $3i$.
L'équation a donc 8 solutions.

Pour s'entraîner : exercices 4, 9, 17.

5 Appliquer les complexes à la trigonométrie

Méthode : • Moivre : $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

• Euler : $\cos\theta = \dfrac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$ **;** $\sin\theta = \dfrac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$

• Newton :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

• Somme géométrique :

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}. \quad (q \neq 1)$$

Exemple Calculer $\cos 3x$ en fonction de $\cos x$ en utilisant les nombres complexes.

Formule de Moivre : $(\cos x + i\sin x)^3 = \cos 3x + i\sin 3x$.
Or $\mathrm{S} = (\cos x + i\sin x)^3 = \cos^3 x + 3i\cos^2 x\sin x - 3\cos x\sin^2 x - i\sin^3 x$.
$\cos 3x = \mathrm{Re}(\mathrm{S})$, donc $\cos 3x = \cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x$ et comme $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, on a $\cos 3x = \cos^3 x - 3\cos x(1-\cos^2 x)$, soit $\underline{\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x}$.
Remarque : on obtient aussi cette relation en utilisant les formules d'addition.

Exemple Ecrire $\sin^5 x$ sous la forme d'une somme, sans puissances ni produits.

$\sin^5 x = \dfrac{1}{(2i)^5}(e^{ix} - e^{-ix}2i)^5 = \dfrac{1}{(2i)^5}(e^{5ix} - 5e^{3ix} + 10e^{ix} - 10e^{-ix} + 5e^{-3ix} - e^{-5ix})$.
En regroupant deux à deux les termes de même coefficient, on a en utilisant Euler :
$\sin^5 x = \dfrac{1}{(2i)^4}(\sin 5x - 5\sin 3x + 10\sin x)$; $\underline{\sin^5 x = \dfrac{1}{16}(\sin 5x - 5\sin 3x + 10\sin x)}$.

Exemple Calculer $\mathrm{S}_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin kx$ et $\mathrm{S}_2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\cos kx}{cos^k x}$.

• $\sin kx = \mathrm{I}m(e^{ikx})$, calculons donc $\Sigma_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = \sum_{k=0}^{n} (e^{ix})^k$. On a donc :

$$\Sigma_1 = \frac{e^{(n+1)ix} - 1}{e^{ix} - 1} = \frac{e^{\frac{(n+1)ix}{2}}\left(e^{\frac{(n+1)ix}{2}} - e^{\frac{-(n+1)ix}{2}}\right)}{e^{\frac{ix}{2}}\left(e^{\frac{ix}{2}} - e^{\frac{-ix}{2}}\right)} = \frac{e^{\frac{nix}{2}}\, 2i\sin[(n+1)x/2]}{2i\sin(x/2)}.$$

$\boxed{\mathrm{I}m(\Sigma_1) = \mathrm{S}_1 = \dfrac{\sin(nx/2)\sin[(n+1)x/2]}{\sin(x/2)}}$. Bien noter la factorisation par $e^{\frac{(n+1)x}{2}}$.

• $\cos kx = \mathrm{Re}(e^{ikx})$, calculons $\Sigma_2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{e^{ikx}}{\cos^k x} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{e^{ix}}{\cos x}\right)^k$.

$$\Sigma_2 = \frac{\left(\dfrac{e^{ix}}{\cos x}\right)^{n+1} - 1}{\left(\dfrac{e^{ix}}{\cos x}\right) - 1} = \frac{\dfrac{e^{(n+1)ix}}{\cos^{n+1} x} - 1}{\dfrac{\cos x + i\sin x - \cos x}{\cos x}} = \frac{\dfrac{e^{(n+1)ix}}{\cos^n x} - \cos x}{i\sin x}.$$

$\mathrm{S}_2 = \mathrm{Re}(\Sigma_2) = \mathrm{Re}\left(-i\dfrac{e^{(n+1)ix} - \cos^{n+1} x}{\cos^n x\sin x}\right)$; $\boxed{\mathrm{S}_2 = \dfrac{\sin(n+1)x}{\sin x\cos^n x}}$.

Pour s'entraîner : exercices 5, 6, 8, 13.

6 Démontrer des relations avec des modules

Méthode : Essayer d'abord d'utiliser les propriétés des modules, sinon remplacer $|z|^2$ par x^2+y^2 ou par $z\overline{z}$. Attention l'égalité $|z|=|z'|$ n'implique pas $z=z'$!

Exemple Montrer que pour tous z et z', $|z+z'|^2+|z-z'|^2=2|z^2|+2|z'^2|$.

$|z+z'|^2+|z-z'|^2=(z+z')(\overline{z+z'})+(z-z')(\overline{z-z'})=(z+z')(\overline{z}+\overline{z'})+(z-z')(\overline{z}-\overline{z'})$
$=z\overline{z}+z\overline{z'}+z'\overline{z}+z'\overline{z'}+z\overline{z}-z\overline{z'}-z'\overline{z}+z'\overline{z'}=2z\overline{z}+2z'\overline{z'}=2|z^2|+2|z|^2$.
Le remplacement de z et z' par leur forme algébrique, donne un calcul plus long.

Exemple Montrer que $|z+z'|+|z-z'|\geqslant|z|+|z'|$.(1)

Supposons que $max\{|z|,|z'|\}=|z|$; on sait que $|\mathrm{Z}|+|\mathrm{Z}'|\geqslant|\mathrm{Z}+\mathrm{Z}'|$, donc :
$|z+z'|+|z-z'|\geqslant|z+z'+z-z'|$, soit $|z+z'|+|z-z'|\geqslant 2|z|\geqslant|z|+|z'|$.
Si $max\{|z|,|z'|\}=|z'|$, on écrit $|z+z'|+|z-z'|=|z+z'|+|z'-z|\geqslant|z+z'+z'-z|$, donc $|z+z'|+|z-z'|\geqslant 2|z'|\geqslant|z|+|z'|$. Dans les deux cas on a bien (1).
Imaginez la complexité du calcul, si on avait utilisé les formes algébriques !

Exemple Résoudre dans $\mathbb{C}$: $2z+3\overline{z}=\left(3-\frac{4}{5}i\right)|z|$; $z=x+iy$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

$2(x+iy)+3(x-iy)=\left(3-\frac{4}{5}i\right)\sqrt{x^2+y^2}$, soit $5x-iy=\left(3-\frac{4}{5}i\right)\sqrt{x^2+y^2}$.
En écrivant que les deux membres ont même partie réelle et même partie imaginaire, on obtient le système : $\begin{cases}5x=3\sqrt{x^2+y^2}\\ y=\frac{4}{5}\sqrt{x^2+y^2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}25x^2=9(x^2+y^2)\\ 25y^2=16(x^2+y^2)\\ x\geqslant 0, y\geqslant 0\end{cases}$
Les deux équations sont identiques : $16x^2=9y^2$, soit $4x=3y$ puisque x et y doivent être positifs. Les solutions sont donc les nombres de la forme $x+\frac{4}{3}xi=\frac{x}{3}(3+4i)$ avec $x\geqslant 0$. Il était ici indispensable de mettre z sous sa forme algébrique.

Exemple Montrer que l'application $f:z\mapsto\dfrac{z-1}{z+1}$ est une bijection de $\mathbb{C}-\{-1\}$ sur $\mathbb{C}-\{1\}$. Montrer que sa restriction à $\mathcal{P}=\{z\in\mathbb{C}/\mathrm{Re}(z)>0\}$ est une bijection de $\mathcal{P}$ sur $\mathcal{D}=\{z\in\mathbb{C}/|z|<1\}$. On notera M et M' les points d'affixes z et f(z).

• Soit $z'\in\mathbb{C}-\{1\}$; l'égalité $f(z)=z'$ s'écrit $z-1=(z+1)z'$, soit $z(1-z')=1+z'$, et comme $z'\neq 1$ $z=\dfrac{1+z'}{1-z'}$: z' a un seul antécédent z ; f est bien une bijection.
• $|z-1|$ est la distance de M à A d'affixe 1 et $|z+1|$ celle de M à B d'affixe -1, donc $\mathrm{M}'\in\mathcal{D}\Leftrightarrow\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right|<1\Leftrightarrow|z-1|<|z+1|\Leftrightarrow \mathrm{AM}<\mathrm{BM}\Leftrightarrow\mathrm{M}\in\mathcal{P}$.
La dernière équivalence est due au fait que l'axe des y est médiatrice de [AB].
Donc si $z\in\mathcal{P}$, alors $z'\in\mathcal{D}$ et si $z'\in\mathcal{D}$, alors $z\in\mathcal{P}$.
La restriction de f à $\mathcal{P}$ est bien une bijection de $\mathcal{P}$ sur $\mathcal{D}$.

Pour s'entraîner : exercices 14, 15, 16.