Chapitre 1

Applications linéaires continues

Ce chapitre préliminaire est consacré à quelques rappels sur la topologie des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$, qui sont le cadre naturel dans lequel on développera le calcul différentiel dans les prochains chapitres. L'exemple canonique est bien sûr $\mathbb{R}^n$ auquel on consacrera de nombreux exemples.

On supposera que le lecteur a des notions élémentaires sur la topologie des espaces métriques, notamment les notions d'ouverts, fermés, intérieur, adhérence, continuité, etc.

Sauf mention contraire, dans tout ce qui suit, E et F désignent des espaces vectoriels normés sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1 Espaces vectoriels normés

Définitions 1.1. *On appelle espace vectoriel normé sur un corps* $\mathbb{K}$, *la donnée d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E *et d'une application* N *définie de* E *dans* $\mathbb{R}$ *vérifiant :*

1. $N(x) \geq 0, \forall x \in E$,
2. $N(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$,
3. $N(x+y) \leq N(x) + N(y), \quad \forall (x,y) \in E \times E$ *(inégalité triangulaire),*
4. $N(\lambda x) = |\lambda|.N(x) \quad \forall x \in E, \quad \lambda \in \mathbb{K}$.

Notation
On note $N(x)$ par $\|x\|_E$ ou simplement $\|x\|$ s'il n'y a pas de confusion.

Remarque 1.1.

Sur tout espace vectoriel normé E, on définit une distance d en posant

$$d(x,y) = \|x - y\|.$$

Donc tout espace vectoriel normé est un espace métrique. Posons $\overline{B}(a,r) = \{x \in E; d(x,a) \leq r\}$. Le sous- ensemble $\overline{B}(a,r)$ est la boule fermée de centre a et de rayon r pour la norme $\|.\|$. On appelle ouvert de E tout sous-ensemble U tel, pour tout $a \in U$, il existe $r > 0$ tel que $\overline{B}(a,r) \subset U$. La topologie sur E est séparée. L'application $u \mapsto \|u\|$ de E dans $\mathbb{R}$ est continue.

Définition 1.1. *Deux normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sur un même espace E sont dites équivalentes si et seulement s'il existe deux constantes c_1, c_2 positives telles que, pour tout $x \in E$, on a :*

$$c_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2\|x\|_1.$$

Proposition 1.1. *Si deux normes sur un même espace sont équivalentes, elles induisent la même topologie.*

Définitions 1.2.

1. *L'espace métrique E est dit complet si toute suite de Cauchy de E est convergente.*
2. *On appelle espace de Banach un espace vectoriel normé complet.*

Exemple 1.1.

1. On munit le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ des normes suivantes :

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|; \quad \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \text{ (norme euclidienne)}; \tag{1.1}$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|. \tag{1.2}$$

L'espace $\mathbb{R}^n$ muni de chacune de ces normes est un espace de Banach.

2. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n, à coefficients réels. Si on pose

$$\|M\| = \max_{i,j} |M_{ij}|, \tag{1.3}$$

où les réels M_{ij} désignent les coefficients de la matrice M, alors on munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une structure d'espace de Banach.

3. Soit X un espace topologique. On note $\mathcal{C}_b(X)$ l'ensemble de toutes les applications continues et bornées définies de X dans $\mathbb{R}$.
   On pose $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$. Ainsi $\mathcal{C}_b(X)$ est un espace de Banach réel. Cette norme est appelée norme de la convergence uniforme.

Théorème 1.1. *Sur $\mathbb{R}^n$ toutes les normes sont équivalentes.*

Il suffit de montrer que toute norme ρ sur $\mathbb{R}^n$ est équivalente à la norme euclidienne $\|.\|_2$.

Soit $x \in \mathbb{R}^n$, $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ avec $\|e_i\|_2 = 1$ ((e_i) base canonique). La norme ρ est continue :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad |\rho(x) - \rho(y)| \leq \rho(x-y) \leq \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \rho(e_i). \tag{1.4}$$

Si x tend vers y alors x_i tend vers y_i pour tout i; donc $|\rho(x) - \rho(y)| < \epsilon$ si $|x - y| < \eta$.

Ainsi ρ est bornée sur le compact $\S = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_2 = 1\}$ donc il existe deux réels positifs ou nuls m et M tels que $m \leq \rho(x) \leq M$ pour tout x tel que $\|x\|_2 = 1$. Mieux ces bornes sont atteintes en particulier il existe $x_0 \in \S$ tel que $m = \rho(x_0)$. Comme $\|x_0\| \neq 0$ alors $x_0 \neq 0$ par conséquent $m \neq 0$. Ainsi il existe $m > 0$ et $M > 0$ tels $m \leq \rho(x) \leq M$ pour tout x tel que $\|x\|_2 = 1$. Si $y \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ on a :

$$m \leq \rho\left(\frac{y}{\|y\|_2}\right) \leq M \Rightarrow m\|y\|_2 \leq \rho(y) \leq M\|y\|_2\|_2 = 1 \tag{1.5}$$

relation qui reste vraie même si $y = 0$.

1.2 Séries normalement convergentes

Définition 1.2. *Soit E un Banach et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. On dit que la série de terme général u_n est normalement convergente si la série des normes $\sum_{n \geq 0} \|u_n\|$ est convergente.*

Théorème 1.2. *Dans un Banach toute série normalement convergente est convergente.*

Démonstration.
On a :

$$\|\sum_{n\geq 0} u_n\| \leq \sum_{n\geq 0} \|u_n\|. \tag{1.6}$$

Posons $R_N = \sum_{n=0}^{N} \|u_n\|$ et $S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$. Pour $N > p$ on a :

$$\|S_p - S_N\| = \|\sum_{n=p+1}^{N} u_n\| = |R_N - R_p|. \tag{1.7}$$

Comme la série de terme général $\|u_n\|$ converge dans $\mathbb{R}$, elle est de Cauchy. Ainsi, $|R_N - R_p| < \epsilon$ si $N, p \geq N_0$ donc (S_N) est une suite de Cauchy dans E qui est complet ; par conséquent (S_n) converge.

1.3 Applications linéaires continues

Soit E et F deux espaces vectoriels normés sur un corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Théorème 1.3. *Pour une application linéaire $f : E \to F$, les conditions suivantes sont équivalentes :*
i) f est continue en tout point de E.
ii) f est continue à l'origine zéro.
ii) $\|f(x)\|$ est bornée sur la boule unité.
iv) f est uniformément continue sur E.

Démonstration.
$i)$ implique $ii)$ et $iv)$ implique $i)$ trivialement.

Montrons que $ii) \Rightarrow iii)$. Comme f est continue à l'origine on a : $\forall\epsilon > 0, \quad \exists\eta > 0 / \|x\|_E < \eta \Rightarrow \|f(x)\|_F \leq \epsilon$. En particulier pour $\epsilon = 1$, il existe $r > 0$ tel que $\|x\|_E \leq r \Rightarrow \|f(x)\|_F \leq 1$.

Pour tout $z \in \overline{B}(0, 1)$ posons $x = rz$; donc $\|x\|_E \leq r$ et $\|f(x)\|_F \leq 1$; ainsi $\|f(x)\|_F \leq \frac{1}{r}$. Par conséquent il existe $M = \frac{1}{r} > 0$ tel que, pour tout élément z de la boule fermée $\overline{B}(0, 1)$, on a$\|f(z)\| \leq M$.

$iii) \Rightarrow iv)$. Soit $x \in E$, $x \neq 0$; posons $y = \frac{x}{\|x\|}$, $y \in \overline{B}(0, 1)$ donc $\|f(x)\| \leq \frac{1}{r} = M \Rightarrow \|f(x)\| \leq \frac{1}{r}\|x\|$; ceci reste vrai si $x = 0$. Ainsi

$$\exists M > 0, \quad \forall x \in E, \quad \|f(x)\| \leq M\|x\|. \tag{1.8}$$

Pour tout $\epsilon > 0$, existe-t-il $\eta > 0$ tel que pour tout $(x, x_0) \in E^2$ si

$\|x - x_0\| \leq \eta$ alors $\|f(x) - f(x_0)\| \leq \epsilon$? On a :

$$\|f(x) - f(x_0)\| = \|f(x - x_0)\| \leq M\|x - x_0\|. \tag{1.9}$$

Donc il suffit de prendre $\eta = \frac{\epsilon}{M}$.

Notons $L(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F. Sur $L(E, F)$ on définit une norme en posant :

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|f(x)\|. \tag{1.10}$$

Remarque 1.2.

On a : $\|f(x)\| \leq \|f\|.\|x\|$ et $\|f\|$ est le plus petit réel M vérifiant la relation (1.8).

En effet, pour tout $y \in \overline{B}(0, 1)$ on a :

$$\|f(y)\| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \|f(x)\| = \|f\|. \tag{1.11}$$

Si $x \in E - \{0\}$ posons $y = \frac{x}{\|x\|}$; alors $y \in \overline{B}(0, 1)$ et $\|f(y)\| \leq \|f\|$ ce qui équivaut à $\|f(\frac{x}{\|x\|})\| \leq \|f\|$ et par suite on a alors $\|f(x)\| \leq \|f\|\|x\|$.

Soit M un réel positif ou nul donné tel que $\|f(x)\| \leq M \quad \forall x \in \overline{B}(0, 1)$ alors

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|f(x)\| \leq M \Rightarrow \|f\| \leq M. \tag{1.12}$$

Théorème 1.4. *Si F est un Banach alors $L(E, F)$ est un Banach.*

Démonstration.

Soit (f_n) une suite de Cauchy dans $L(E, F)$. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe alors un entier n_0 tel que, pour tous $n, m \geq n_0$, $\quad \|f_n - f_m\| \leq \epsilon$. Ce qui équivaut à $\sup_{\|x\| \leq 1} \|f_n(x) - f_m(x)\| \leq \epsilon$; autrement dit $\forall x \in \overline{B}(0, 1)$, $\|f_n(x) - f_m(x)\| \leq \epsilon$. La suite $f_n(x)$ est alors de Cauchy dans F complet donc elle converge vers un point noté $f(x)$. La convergence est uniforme sur la boule unité (En fait sur chaque boule compacte) on a :

$f(x) = \lim f_n(x) \quad \forall x \in \overline{B}(0, 1)$.

Pour tout $x \in E$, $x \neq 0$ en posant $y = \frac{x}{\|x\|}$ on a :

$$f(y) = \lim_n f_n\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \frac{1}{\|x\|} \lim_n f_n(x)$$

d'où l'on tire

$$\lim_n f_n(x) = \|x\| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = f(x).$$

Proposition 1.2. *Soient E, F et G trois espaces vectoriels normés, $f : E \to F$, $g : F \to G$ deux applications linéaires continues alors $g \circ f$ est une application linéaire continue et*

$$\|g \circ f\| \leq \|g\|.\|f\|. \tag{1.13}$$

1.4 Isomorphisme d'espaces vectoriels normés

Définition 1.3. *Une application $f : E \to F$ est un isomorphisme si et seulement si*

i) f est linéaire continue,

ii) il existe une application g linéaire continue de F dans E telle que $g \circ f = Id_E$ et $f \circ g = Id_F$.

Il n'est pas toujours aisé de chercher la réciproque d'une application. En plus la continuité d'une application bijective n'implique pas a priori celle de l'application réciproque. Le cas des applications linéaires entre espaces de Banach est réglé par le théorème suivant :

Théorème 1.5. *(de Banach) [admis] Si E et F sont des espaces de Banach alors toute application linéaire continue bijective est un isomorphisme.*

Théorème 1.6. *Tout espace vectoriel normé E de dimension finie est un Banach et toute application linéaire de E dans un espace normé F de dimension finie ou non est continue.*

La démonstration de ce théorème se déduit du lemme suivant :

Lemme 1.1. *Toute application linéaire $f : \mathbb{R}^n$ dans un espace vectoriel normé F de dimension quelconque est continue ; si f est bijective alors f est un isomorphisme.*

Démonstration.
Soit (e_i) la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i e_i$.
$f(x) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i)$. Posons $M = \sup_{1\leq i\leq n} \|f(e_i)\|$.

$$\|f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \|f(e_i)\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|.M \leq \epsilon \ \text{ si } \ \sum_{i=1}^n |x_i| \leq \frac{\epsilon}{M}.$$

D'où f est continue.

Supposons que f est bijective et soit g l'application réciproque de f. L'application g est trivialement linéaire. Si ρ est une norme sur F alors $\rho \circ f$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Montrons que g est continue pour la norme $\rho \circ f$. (Donc pour toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$).

Pour tout $x \in F$, et pour tout $\epsilon > 0$, existe-t-il $\eta > 0$ tel que pour tout $y \in F$, si $\rho(x-y) < \eta$ alors $\rho \circ f\,(g(x) - g(y)) \leq \epsilon$.

$$\rho(x-y) < \eta \Rightarrow \rho \circ f \circ g(x-y) = \rho(x-y) < \eta. \tag{1.14}$$

Il suffit de prendre $\eta = \epsilon$.

Preuve du théorème. 1.6

Soit h une application linéaire de E dans F avec $dimE = n$. Il existe un isomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ dans E : si $B = (e'_i)_{1\leq i\leq n}$ est une base de E il suffit de considerer l'application

$$f : (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \mapsto x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e'_i.$$

Posons $g = h \circ f$; alors g est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans F et d'après le lemme ci-dessus, elle est continue donc $h = g \circ f^{-1}$ est continue.

Théorème 1.7. *Soit E un espace de Banach et $f \in L(E,E)$. On note*

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{nfois}.$$

La série $\sum_{n\geq 0} \frac{f^n}{n!}$ est convergente. On note $Exp(f)$ sa somme.

Démonstration.

En utilisant l'inégalité (1.13) on a :

$$\|f^n\| = \|f \circ f \circ \ldots \circ f\| \leq \|f\|.\|f\| \ldots \|f\| = \|f\|^n$$

or la série $\sum_{n\geq 0} \frac{\|f\|^n}{n!}$ est convergente et sa somme est $exp(\|f\|)$ qui majore $\sum_{n\geq 0} \frac{\|f^n\|}{n!}$. Donc la série $\sum_{n\geq 0} \frac{f^n}{n!}$ est normalement convergente et d'après le théorème 1.2 elle est convergente.

Théorème 1.8. *Soit E un Banach et soit $u \in L(E,E)$ tel que $\|u\| < 1$ alors $I - u$ est inversible dans l'algèbre $L(E,E)$ où I désigne l'application identité.*

Démonstration.
i) Si $u = 0$ alors $I - u = I$ est inversible.
ii) Supposons que $0 < \|u\| < 1$ la série $\sum_{n \geq 0} u^n$ est normalement convergente puisque $\|u^n\| \leq \|u\|^n < 1$. Soit $v = \sum_{n \geq 0} u^n$ on a :

$$uv = vu = \sum_{n \geq 1} u^n = v - I. \tag{1.15}$$

Donc $I = v - uv = v - vu$; ce qui signifie que $(I-u)v = v(I-u) = I$. Ainsi $I - u$ est inversible, d'inverse v.

Théorème 1.9. *Soit E et F deux Banach. Notons Isom(E,F) le sous-ensemble de L(E,F) formé des isomorphismes de E sur F. Alors :*
i) Isom(E,F) est un ouvert de L(E,F).
ii) L'application $J : u \mapsto u^{-1}$ de Isom(E,F) dans L(E,F) est continue.

Démonstration.
i) Si $Isom(E,F) = \emptyset$ alors le théorème est trivialement vrai.
Sinon soit $u_0 \in Isom(E,F)$, il faut montrer que tout u « assez proche »de u_0, est un isomorphisme ; il faut et il suffit que
$u_0^{-1} u \in Isom(E,E)$.
Posons $v = I - u_0^{-1} \circ u$.

$$\|v\| = \|I - u_0^{-1} \circ u\| \leq \|u_0^{-1}\| \|u_0 - u\|. \tag{1.16}$$

Donc si $\|u_0 - u\| < \frac{1}{\|u_0^{-1}\|}$ alors $\|v\| < 1$ et d'après le théorème 1.8 l'application $I - v = u_0^{-1} u$ est inversible donc u est inversible c'est-à-dire $u \in Isom(E,F)$ tant que $\|u_0 - u\| < \frac{1}{\|u_0^{-1}\|}$.
ii) $u^{-1} = [u_0(I - v)]^{-1} = (I - v)^{-1} \circ u_0^{-1}$. Donc

$$u^{-1} - u_0^{-1} = \left[(I-v)^{-1} u_0^{-1} - u_0^{-1}\right] = \left[(I-v)^{-1} - I\right] u_0^{-1}. \tag{1.17}$$

$$(I - v)^{-1} = \sum_{n \geq 0} v^n \qquad \text{d'où } (I - v)^{-1} - I = \sum_{n \geq 1} v^n. \tag{1.18}$$

$$\|(I - v)^{-1} - I\| \leq \sum_{n \geq 1} \|v^n\| \leq \sum_{n \geq 1} \|v\|^n = \frac{\|v\|}{1 - \|v\|}. \tag{1.19}$$

Ainsi

$$\|u^{-1} - u_0^{-1}\| \leq \|u_0^{-1}\| . \frac{\|v\|}{1 - \|v\|}. \tag{1.20}$$

Si u tend vers u_0 alors v tend vers 0; donc u^{-1} tend vers u_0^{-1}. D'où la continuité de l'application J.