Chapitre 1

Introduction au calcul des probabilités

Le hasard ne réussit qu'aux esprits bien préparés
Louis Pasteur (1822–1895)

1.1 Motivations

La théorie des probabilités trouve son origine dans la vie courante où l'issue d'une expérience peut être considérée comme aléatoire (*eg,* jeu de pile ou face, jeux de dés, jeux de cartes). C'est pourquoi, dans un premier temps, il semble tout naturel de dire qu'un phénomène aléatoire est un phénomène dont l'issue est incertaine.

Toutefois, la notion d'aléatoire est une notion toute relative ; si l'on considère un phénomène naturel sans s'intéresser au fonctionnement détaillé de celui-ci (parce qu'on ne veut pas ou parce qu'on ne sait pas le faire), on peut très bien considérer que le résultat est quelque chose d'incertain (par manque d'information). Par exemple, le fonctionnement d'un ordinateur est déterministe et on pourrait imaginer un modèle très fin de machine où le résultat examiné (*eg,* le temps d'exécution d'un programme parfaitement connu) ne serait aucunement aléatoire ; mais un tel modèle serait trop complexe pour être exploitable.

Ainsi, en général, un modèle probabiliste sera un modèle macroscopique d'un phénomène complexe. Par exemple, le résultat du lancement d'une pièce de monnaie (au jeu de pile ou face) est considéré dans la vie courante comme purement aléatoire ; pourtant ce lancement obéit pour une part aux mêmes lois de la mécanique que le lancement d'un satellite dont l'étude déterministe est relativement bien élaborée ; toutefois, les forces initiales exercées par la main du lanceur varient de façon incontrôlable. Donc, la volonté de réaliser une étude simplifiée d'un phénomène naturel complexe, le manque d'information, les lacunes de notre science ou l'intervention humaine mal contrôlée sont autant de raisons pour développer un formalisme mathématique adapté à ce qu'il est convenu d'appeler des phénomènes aléatoires.

Disons encore qu'un phénomène aléatoire, comme le mot l'indique, est caractérisé par le fait que son comportement futur n'est pas prévisible de façon déterministe compte tenu des informations dont on dispose.

1.2 Ensemble fondamental

Les issues d'une *expérience aléatoire* peuvent prendre différentes formes ; par exemple, il peut s'agir tout simplement de constater que votre voiture démarre à la première sollicitation du démarreur. Ou encore, lors d'un essai de connexion sur un serveur à travers un réseau informatique, l'issue sera le succès ou l'échec se manifestant par l'affichage « all ports busy ». Lors d'une expérience aléatoire plus complexe, il pourra s'agir de déterminer le temps de bon fonctionnement d'un ordinateur.

Le résultat de telles observations, qu'il se traduise par un simple « oui-non », ou par une quantité, est appelé une *éventualité*, ou encore un *événement élémentaire*.

Définition 1.2.1. *Un ensemble fondamental est l'ensemble de tous les événements élémentaires (ou éventualités) d'une expérience aléatoire.*

En général, on utilisera la notation Ω pour désigner un ensemble fondamental et ω pour désigner une éventualité. Dans certains ouvrages, Ω est encore appelé « univers ».

Un ensemble fondamental Ω n'est pas déterminé uniquement par le phénomène aléatoire considéré mais aussi par les motivations qui sont à l'origine de l'étude entreprise. Par exemple, supposons qu'une firme automobile A s'intéresse à l'expérience aléatoire consistant à examiner la répartition entre les voitures de marque A et les voitures de marques autres que A d'une famille possédant deux voitures. Pour certaines préoccupations, il est suffisant de considérer seulement les trois éventualités suivantes : « aucune voiture A », « une voiture A » et « deux voitures A ». Ces trois éventualités constituent l'ensemble fondamental. Pour d'autres préoccupations, il peut s'avérer intéressant de savoir, lorsque la famille possède une seule voiture de marque A, si cette voiture a été acquise la dernière. Dans ce cas, l'ensemble fondamental contient quatre éléments.

C'est ainsi que, souvent, on construira un ensemble fondamental plus grand et plus facile à utiliser que celui strictement nécessaire. Notons aussi que, d'une façon générale, il est plus facile de délaisser une information superflue que de retrouver une information manquante. Ainsi, pour continuer avec l'exemple précédent, appelons Ω_1 et Ω_2 les deux ensembles fondamentaux successivement construits :

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \{0, 1, 2\} \\ \Omega_2 &= \{(x, x), (x, A), (A, x), (A, A)\} \end{aligned}$$

où x désigne toute autre marque que A et où (x, A) désigne l'éventualité correspondant au cas où seule la dernière voiture achetée est de marque A. On remarque ici que connaissant l'éventualité ω_2 de Ω_2, on peut en déduire celle de Ω_1 alors que l'inverse n'est pas (toujours) vrai.

En résumé, le choix de Ω résulte d'une intention formaliste délibérée. Ainsi, pour décrire l'issue du lancer d'une pièce de monnaie, on peut retenir les éventualités pile et face mais on peut aussi choisir d'y ajouter l'issue selon laquelle la pièce est perdue en tombant dans un endroit inaccessible.

Les ensembles fondamentaux peuvent être classés en fonction de leur cardinalité ; l'intérêt de ce classement apparaîtra par la suite. Il y a d'abord les ensembles finis comme ceux de l'exemple précédent sur les familles possédant deux voitures. Pour introduire un ensemble infini d'événements élémentaires, considérons le cas de l'inspection d'une chaîne de fabrication de circuits intégrés. L'expérience consiste à s'arrêter dès qu'on obtient une puce défectueuse. Cette puce peut être la première, la seconde,..., la n-ième,... et une telle expérience peut donner lieu *a priori* à un ensemble infini d'éventualités, car si on s'arrêtait à la n-ième, il n'y aurait pas de raison valable pour que la $(n+1)$-ième ne soit pas une éventualité. Il y a donc lieu de prendre comme ensemble Ω toutes les suites finies de la forme (BB...BD) où les B représentent les puces bonnes et D la puce défectueuse, c'est-à-dire un ensemble d'éléments qui peut être mis en correspondance biunivoque avec l'ensemble des nombres naturels $\mathbb{N}$. Un esprit chagrin pourra objecter dans cet exemple que la fabrication de la puce risque d'être bornée elle-même par un entier K pris suffisamment grand mais rien ne nous empêche de concevoir cette expérience dans une situation abstraite (un modèle choisi) où la fabrication ne s'arrête jamais. Remarquons qu'on obtiendrait un exemple similaire en considérant les lancers répétés d'une pièce jusqu'au premier pile.

Il convient de rappeler que de tels ensembles pour lesquels on peut faire correspondre de façon bijective les éléments de Ω avec ceux de $\mathbb{N}$ sont des ensembles (infinis) dénombrables.

Ajoutons ici que de nombreuses situations réelles qui pourraient être modélisées par des ensembles fondamentaux finis le sont avec des ensembles dénombrables pour la simple raison que la solution sera plus simple à exprimer dans le cas infini, contrairement à ce que risque de penser le lecteur débutant.

D'un point de vue mathématique, il n'est généralement pas nécessaire de faire une distinction entre les ensembles finis et les ensembles infinis dénombrables. On parle alors d'*ensemble fondamental discret.*

Si l'on considère maintenant l'expérience dont l'éventualité est le temps de bon fonctionnement d'un ordinateur, l'issue peut être n'importe quel nombre réel non négatif. Comme un intervalle de réels est non dénombrable, l'ensemble fondamental est ici non dénombrable. On parle alors d'un *ensemble fondamental continu.* Rappelons que la mémoire d'un ordinateur constitue un ensemble d'octets dénombrable et même fini et qu'il n'est donc pas pensable d'y représenter un réel quelconque.

Remarque : le temps de bon fonctionnement a été naturellement défini comme un nombre réel mais au niveau de la mesure de ce temps lors d'une expérience, le dispositif ne sera pas capable de fournir une quelconque valeur réelle. On pourrait tout aussi bien supposer pour les besoins de l'application que la mesure est faite en nombres entiers de picosecondes. On peut considérer ici l'ensemble fondamental continu comme un modèle idéalisé. Et un esprit optimiste pensera, non sans raison, que ce modèle doit être, au bout du compte, plus facile à étudier que le cas discret. $\triangle$[1]

1.3 Événements

Définition 1.3.1. *Un événement est une collection d'éventualités, ie, un sous-ensemble de* Ω*.*

De la même façon, toute déclaration qui définit un sous-ensemble de Ω est un événement.

Exemple 1.1. Considérons une épreuve (une expérience) consistant à jeter un dé à six faces, marquées classiquement 1,2,...,6, et à regarder la valeur de la face supérieure. L'ensemble fondamental est ici $\Omega = \{1, 2, ..., 6\}$ et l'événement A, caractérisé par A=« le nombre obtenu est pair », correspond au sous-ensemble $\{2,4,6\}$. $\diamondsuit$[2]

1. Rappelons que, dans cet ouvrage, ce signe informe le lecteur de la fin de la remarque courante.

Exemple 1.2. *Revenons sur l'épreuve consistant à mesurer le temps de bon fonctionnement d'un ordinateur. On a* $\Omega = [0, +\infty[= \{t \mid 0 \leq t < +\infty\}$ *et l'événement « l'ordinateur fonctionne au moins pendant une durée* t_0 *» correspond au sous-ensemble* $\{t \mid t_0 \leq t < +\infty\}$. ♢

Notons que l'ensemble Ω est lui-même un événement, c'est *l'événement certain.* De même, l'ensemble vide ϕ est un événement, c'est *l'événement impossible.*

On dira qu'un événement E est réalisé si le résultat de l'épreuve appartient à cet événement E (*ie,* si $\omega \in E$). Ainsi, dans l'exemple du jet de dé considéré ci-dessus, si le résultat de l'épreuve est 4 ($\omega = 4$), on dira que l'événement A est réalisé.

1.4 Opérations sur les événements

Il s'agit maintenant de décrire les opérations logiques qui peuvent être effectuées sur les événements. Ces opérations obéissent à des règles strictes, indépendamment de la signification plus physique des événements en regard d'un système réel qu'un schéma probabiliste s'attacherait à modéliser. En fait, comme on va le voir, ces opérations ne diffèrent de celles de la théorie des ensembles que par la terminologie employée.

• À tout événement A est associé son *contraire*, noté $\overline{A}$; l'événement $\overline{A}$ est réalisé si et seulement si A ne l'est pas :

$$\overline{A} = \{\omega \in \Omega \mid \omega \notin A\}$$

Exemple 1.3. Reprenons l'exemple précédent correspondant au lancer d'un dé à six faces dans lequel l'événement A était réalisé si le nombre obtenu était pair. Dans ce cas, l'événement $\overline{A}$ est réalisé si le nombre obtenu est impair et cet événement s'identifie au sous-ensemble $\{1, 3, 5\}$. ♢

• Si A_1 et A_2 sont deux événements, l'événement « A_1 et A_2 » est celui qui est réalisé si et seulement si les événements A_1 et A_2 sont réalisés tous les deux *en même temps*. Cet événement correspond au sous-ensemble de Ω suivant :

2. Celui-ci signale la fin de l'exemple.

$$\{\omega \in \Omega \mid \omega \in A_1 \text{ et } \omega \in A_2\}$$

Les éventualités de ce sous-ensemble et elles seules réalisent simultanément les événements A_1 et A_2. Par la suite, la notation classique $A_1 \cap A_2$ sera utilisée pour désigner l'événement « A_1 et A_2 ».

Comme nous avons vu que la notation ϕ désigne l'événement impossible, la relation $A_1 \cap A_2 = \phi$ signifie que les événements A_1 et A_2 sont *incompatibles* ; ce qui correspond dans le langage de la théorie des ensembles au fait que les sous-ensembles A_1 et A_2 sont disjoints. Ainsi, pour tout événement A, $A \cap \overline{A} = \phi$.

- Par définition, l'événement « A_1 ou A_2 » est celui qui est réalisé si l'un *au moins* des deux événements A_1 et A_2 l'est. Cet événement sera désigné par la notation classique $A_1 \cup A_2$. Remarquons qu'il s'agit ici du OU logique *non exclusif*, encore appelé OU *inclusif*. Si A_1 et A_2 sont incompatibles, on pourra utiliser si besoin la notation spécifique $A_1 \oplus A_2$. Formellement, l'événement $A_1 \cup A_2$ est le sous-ensemble :

$$\{\omega \in \Omega \mid \omega \in A_1 \text{ ou } \omega \in A_2\}.$$

Ainsi, pour tout événement A, $A \cup \overline{A} = \Omega$.

- Par définition, l'événement « $A_1 \oplus A_2$ » est l'union des ensembles $(A_1 \cap \overline{A_2})$ et $(\overline{A_1} \cap A_2)$. On utilise cette notation dans la pratique lorsque que les événements A_1 et A_2 sont incompatibles.

- Enfin, dire que la réalisation d'un événement B *implique* celle d'un événement A équivaut à dire que $B \subset A$ au sens de l'inclusion des ensembles.

Le tableau suivant résume les différentes opérations introduites sur les événements.

Notations	Langage probabiliste	Langage ensembliste
Ω	Événement certain.	Ensemble en entier.
ϕ	Événement impossible.	Ensemble vide.
$\overline{A}$	Événement contraire de A	Partie complémentaire de A.
$A_1 \cap A_2$	A_1 et A_2.	Intersection de A_1 et de A_2.
$A_1 \cap A_2 = \phi$	A_1 et A_2 sont incompatibles.	A_1 et A_2 sont disjoints.
$A_1 \cup A_2$	Union de A_1 et A_2.	Réunion de A_1 et de A_2.
$A_1 \oplus A_2$	Union de A_1 et A_2 dans le cas particulier où A_1 et A_2 sont incompatibles.	Réunion de A_1 et A_2 dans le cas de sous-ensembles disjoints.
$\sum_i A_i = \Omega$	Partition de Ω (ou encore système exhaustif).	Partition de Ω.
$A \subset B$	A implique B.	A est inclus dans B.
$B - A$	Différence entre B et A (quand A implique B).	Différence entre B et A (quand $A \subset B$).

Illustrons ces opérations à l'aide de l'exemple suivant.

Exemple 1.4. Considérons le nombre de postes de travail graphiques inoccupés dans la salle de Travaux Pratiques à l'instant où l'on se présente. La salle contient 3 postes ; chaque poste est dans l'un des deux états suivants : occupé ou inoccupé, notés respectivement 0 et 1. L'ensemble fondamental comprend les 2^3=8 éventualités suivantes :

$$
\begin{array}{ll}
\omega_1 = (0,0,0) & \omega_5 = (1,0,0) \\
\omega_2 = (0,0,1) & \omega_6 = (1,0,1) \\
\omega_3 = (0,1,0) & \omega_7 = (1,1,0) \\
\omega_4 = (0,1,1) & \omega_8 = (1,1,1)
\end{array}
$$

Soit A l'événement défini par la déclaration « au moins deux postes sont disponibles » ; on a :

$$A = \{\omega_4, \omega_6, \omega_7, \omega_8\}$$

Soit B l'événement « les 3 postes sont disponibles », *ie,* $B = \{\omega_8\}$ et C l'événement « le 3^e poste est disponible », *ie,* $C = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6, \omega_8\}$;

alors, on a par exemple :

- $\overline{A} = \Omega - A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_5\} =$ « Au plus un poste est disponible »
- $B \subset A$
- $A \cap C = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A \text{ et } \omega \in C\} = \{\omega_4, \omega_6, \omega_8\} =$ « Au moins deux postes sont libres dont le 3ème »
- $A \cup C = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A \text{ ou } \omega \in C\} = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6, \omega_7, \omega_8\}$

$\diamondsuit$

Noter que, si $\mid E \mid$ désigne le cardinal (on dit aussi la cardinalité) d'un sous-ensemble quelconque E de Ω, on a toujours

$$\mid A_1 \cup A_2 \mid \leq \mid A_1 \mid + \mid A_2 \mid .$$

L'égalité correspond au cas où les événements A_1 et A_2 sont incompatibles alors que l'inégalité stricte provient de ce que l'opérateur $\cup$ n'est pas exclusif.

L'algèbre des événements se déduit directement de celle des ensembles car les deux algèbres sont isomorphes. Les propriétés des opérateurs sont donc supposées déjà familières au lecteur et nous n'en faisons qu'un bref rappel non exhaustif :

• Commutativité

$$A \cup B = B \cup A \qquad A \cap B = B \cap A$$

• Associativité

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \qquad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

• Distributivité

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \qquad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

• Identité

$$A \cup \phi = A \qquad A \cap \Omega = A$$