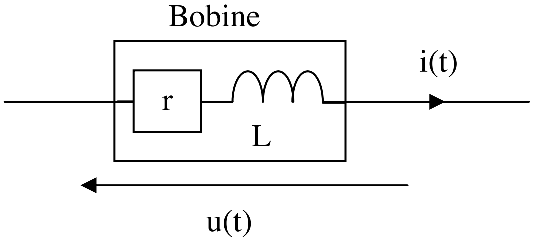
Mines 2009

Épreuve commune (MPSI - PCSI - PTSI)

Calculatrice autorisée.

A ÉLECTRICITÉ

On dispose d'une bobine B que l'on assimilera à l'association série d'une inductance L et d'une résistance r. (L et r sont des constantes positives, indépendantes de la fréquence)

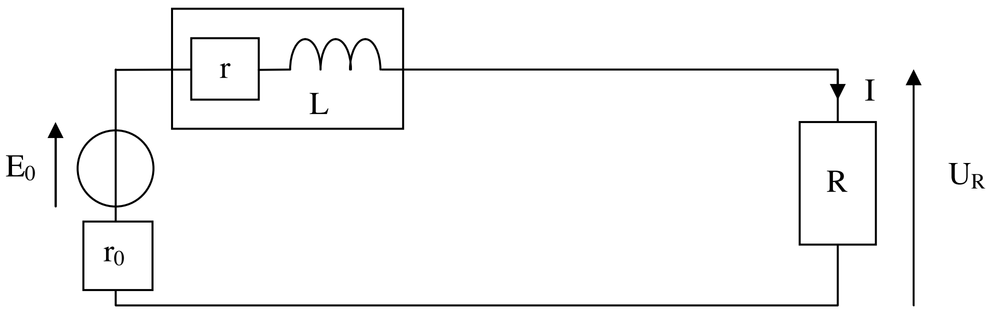


Détermination de *r*

1) La bobine est parcourue par un courant $i(t)$. Exprimer la tension $u(t)$ à ses bornes en fonction de $r, L,\ i(t)$ et de sa dérivée par rapport au temps.

2) On réalise le circuit suivant, en plaçant, en série avec la bobine, un résistor de résistance $R = 40\,\Omega$.

L'alimentation est un générateur de tension continue, constante, de force électromotrice $E_0 = 1{,}0$ V et de résistance interne $r_0 = 2{,}0\,\Omega$

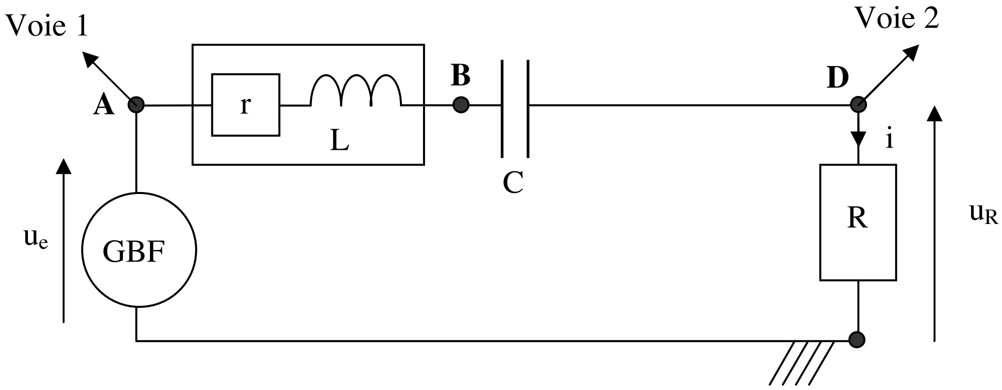


On mesure, en régime permanent, la tension U_R aux bornes de R. Exprimer r en fonction des données de cette question. Calculer r avec $U_R = 0{,}56$ V .

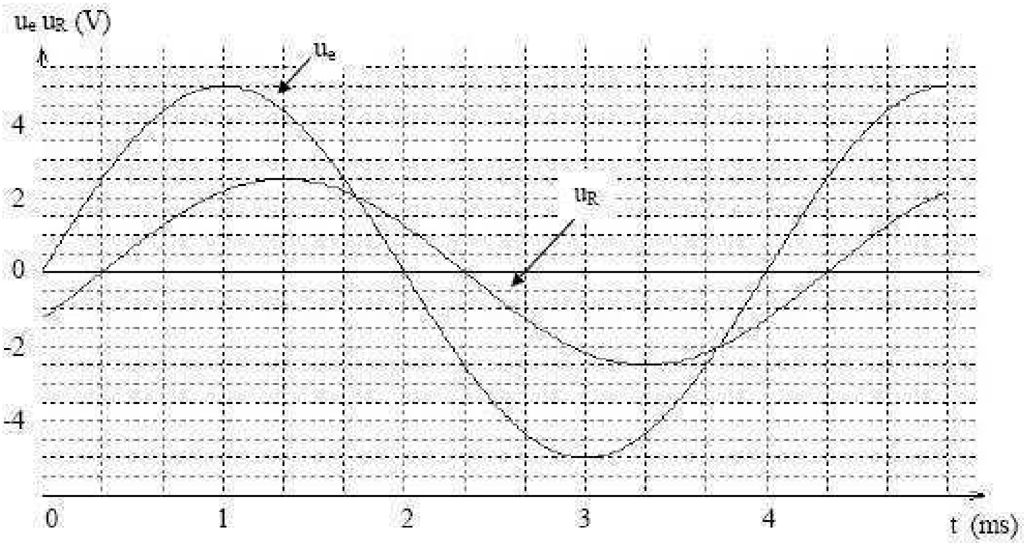
Détermination de *r* et *L* à partir d'un oscillogramme.

On place, en série avec la bobine, un résistor de résistance $R = 40\,\Omega$ et un condensateur de capacité C=10 μF . Le GBF (générateur basses fréquences) est réglé pour délivrer une tension sinusoïdale de fréquence f =250 Hz (la pulsation sera notée ω) et d'une valeur crête à crête de 10 V.

Deux tensions sont visualisées sur un oscilloscope numérique.



On obtient un oscillogramme équivalent au graphe suivant :



3) Déterminer l'amplitude U_e de la tension u_e et l'amplitude U_R de la tension u_R.

4) Déterminer l'amplitude I du courant i.

5) Rappeler l'expression générale de l'impédance Z d'un dipôle quelconque (module de l'impédance complexe). Calculer alors l'impédance Z_{AM} du dipôle AM.

6) Des deux tensions, $u_R(t)$ et $u_e(t)$, laquelle, et pourquoi d'après l'oscillogramme, est en avance sur l'autre ?

7) Déterminer précisément, à partir de l'oscillogramme, le déphasage $\varphi_{u_e/i}$ entre u_e et i, (c'est-à-dire entre u_e et u_R).

8) Écrire l'expression générale de l'impédance complexe $\underline{Z}_{\mathrm{AM}}$ en fonction de r, R, L, C *et* ω.

9) Écrire l'expression de l'impédance complexe $\underline{Z}_{\mathrm{AM}}$ en fonction de son module Z_{AM} et du déphasage $\varphi_{u_e/i}$.

10) Exprimer r en fonction de R, Z_{AM} et $\varphi_{u_e/i}$. Calculer sa valeur.

11) Exprimer L en fonction de C, ω, Z_{AM} et $\varphi_{u_e/i}$. Calculer sa valeur.

Étude de la fonction de transfert.

12) Rappeler la définition de la fonction de transfert $\underline{H}$ du filtre ainsi formé avec u_e pour tension d'entrée et u_R pour tension de sortie.

13) Proposer un schéma équivalent en basses puis en hautes fréquences et en déduire la nature probable du filtre.

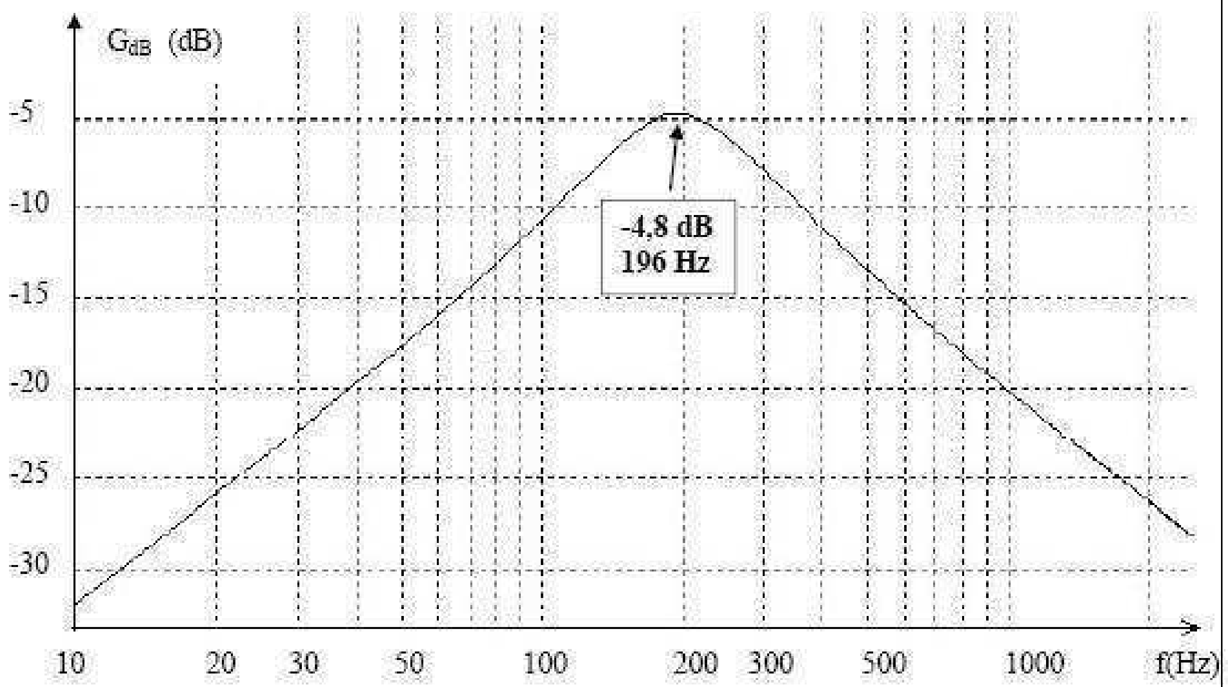
14) Exprimer $\underline{H}$ en fonction de r, R, L, C et ω.

15) Mettre $\underline{H}$ sous la forme : $\underline{H} = \dfrac{H_{\max}}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}$.

On exprimera littéralement $H_{\max}$, le paramètre ω_0 ainsi que le facteur de qualité Q de ce circuit en fonction de r, R, L, C.

16) La figure ci-dessous représente (en partie) le diagramme de Bode du filtre précédent. Rappeler la définition du diagramme de Bode.

17) Déterminer, à partir du graphe et des données initiales, les valeurs de r et L.



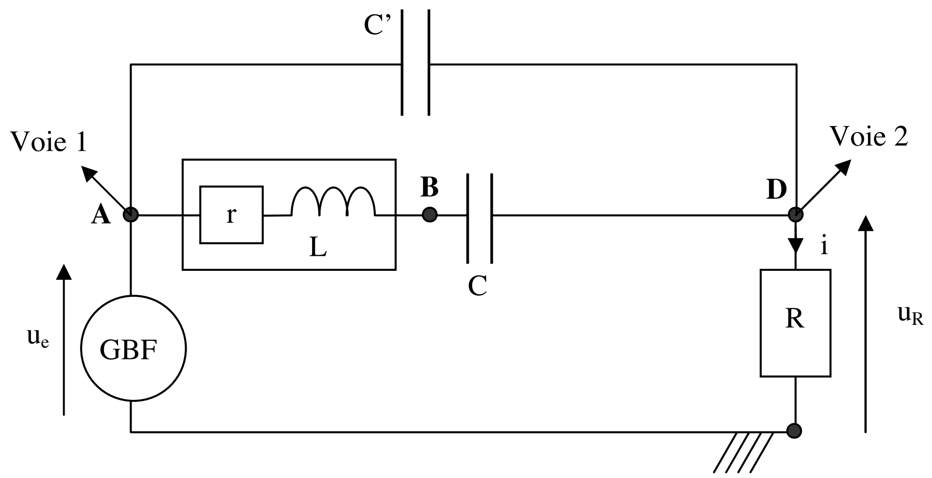
Facteur de puissance.

On reprend le montage figure 3 avec $f = 250\,\text{Hz}$.

18) Rappeler la définition du facteur de puissance d'un circuit.

19) On place alors en parallèle sur AD une boîte de condensateurs à décades et l'on fait varier cette capacité *C'* jusqu'à ce que, en observant l'oscilloscope, u_R et u_e soient en phase.

Quelle est alors la valeur du facteur de puissance du circuit AM ?



20) Quelle est alors la valeur du facteur de puissance du circuit AD ?

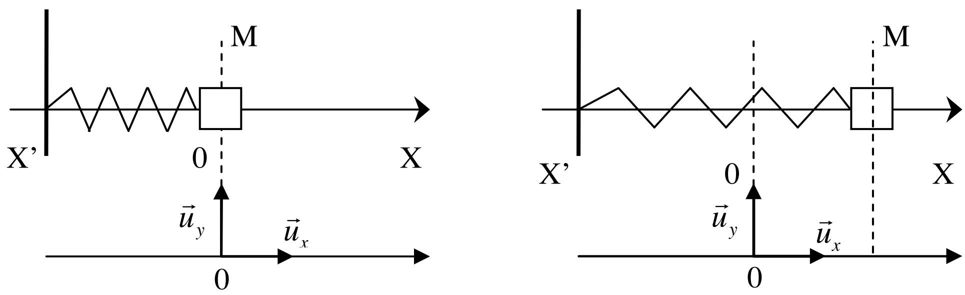
21) Quelle particularité présente alors l'admittance complexe $\underline{Y}_{\text{AD}}$ du circuit AD ?

22) Exprimer $\underline{Y}_{\text{AD}}$ en fonction de r, L, C, C' et de la pulsation ω.

23) Déterminer *C'* en fonction de $r,\ L, C\ et\ \omega$. Faire l'application numérique avec les valeurs de *r* et *L* calculées précédemment.

B MÉCANIQUE

Une particule M de masse *m* peut glisser sur un rail horizontal X'X fixe dans le référentiel terrestre $\Re$ supposé galiléen.



M est fixée à l'extrémité d'un ressort de raideur *k* dont l'autre extrémité est fixe dans $\Re$. La position de M est repérée par son abscisse *x*. $x = 0$ correspond au ressort détendu.

24) Le glissement s'effectue, dans un premier temps, sans frottement.

Représenter, sur un dessin, les forces exercées sur M dans le cas où $x > 0$, faire un bilan de ces forces, puis, par application de la relation fondamentale de la dynamique, déterminer l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$. (Ne pas la résoudre pour l'instant).

25) Donner l'expression de l'énergie potentielle élastique emmagasinée dans le ressort en fonction de *k* et *x*.

26) Exprimer l'énergie mécanique du système {masse + ressort} en fonction de *m, k, x* et de sa dérivée $\dot{x}$. Est-elle conservée au cours du mouvement ? (Justifier).

27) De ce qui précède, déduire à nouveau l'équation différentielle du mouvement de M.

28) Résoudre l'équation différentielle et obtenir l'équation horaire $x(t)$ du mouvement de M dans le cas où M est lancée à $t = 0$ de l'abscisse x_0 avec la vitesse $\vec{V}_o = \dot{x}_0 \vec{u}_x$ (en fonction de x_0, $\dot{x}_0$, *k, m, t*).

29) Maintenant, M est soumise de la part du rail à une force de frottement (frottement solide) de norme constante f quand M est en mouvement et comprise entre 0 et f quand M est immobile.

Grâce à un schéma des forces quand M est en mouvement, et en précisant le sens du mouvement, déterminer l'angle φ entre la réaction du support et la verticale en fonction de m, g, et f.

30) On donne à M l'élongation (l'abscisse) x_0, positive ou négative, et on l'abandonne sans vitesse. A quelles conditions sur x_0 M démarrera-t-elle ? Entre quelles limites de x se situera donc la position d'équilibre finale de M ? (Réponse en fonction de f et k).

31) Du fait que les frottements n'ont pas toujours le même sens, montrer que la force de frottement $\vec{f}$ peut s'écrire $\vec{f} = -\varepsilon f \vec{u}_x$, où le coefficient ε est tel que $\varepsilon = -1$ si $\dot{x} < 0$ et $\varepsilon = +1$ si $\dot{x} > 0$. Écrire alors l'équation différentielle en x du mouvement de M (Paramètres : m, k, f, ε. Ne pas la résoudre).

32) Pour toute la suite du problème, on prendra x_0 positive et très supérieure à la limite de démarrage de M, de telle façon que M effectue plusieurs oscillations. Écrire puis résoudre l'équation sur l'intervalle [x_0 , x_1] où x_1 est l'abscisse de M quand M s'arrête pour la première fois. Quelle est la durée de cette première étape ? Trouver la valeur de x_1.

33) Le phénomène se reproduisant de x_1 à x_2 où M s'arrête à nouveau, etc., le mouvement de M est pseudo périodique. Déterminer la pseudo période T des oscillations.

34) Exprimer le travail de $\vec{f}$ sur le parcours [x_1, x_2] en fonction de f, x_1 et x_2. Sans rechercher à nouveau l'équation horaire du mouvement de M, déterminer alors, grâce à un théorème énergétique, l'élongation x_2 quand M s'arrête pour la deuxième fois. (En fonction de x_0, f et k).

35) De l'étude qui précède, déduire la nature de la décroissance de l'amplitude du mouvement au cours du temps. Déterminer l'équation $x_{\text{Max}}(t)$ de la courbe reliant les maxima de x.

C THERMODYNAMIQUE

Les deux exercices sont indépendants

Cycle moteur théorique et peu performant.

Données numériques : $\gamma = 1{,}4$ Constante des gaz parfaits : $R = 8{,}314\ \text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$

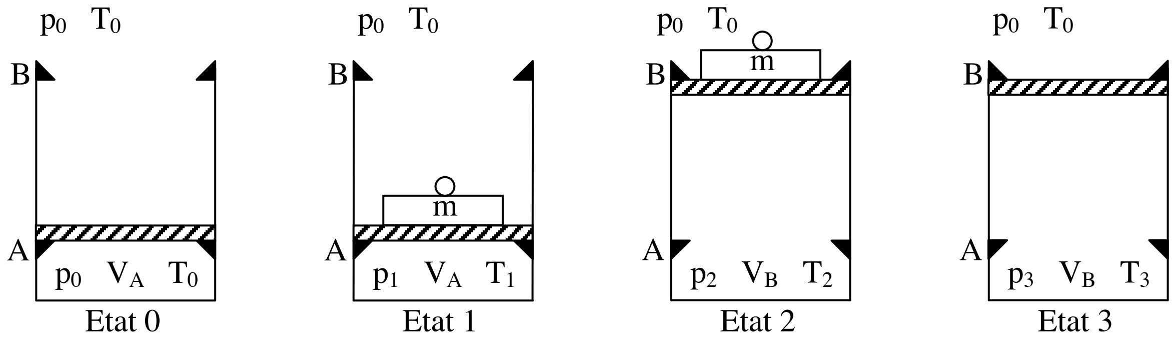
$V_B = 1\ \text{L}$, $V_A = 330\ \text{mL}$, $T_0 = 300\ \text{K}$, $P_0 = 1\ \text{bar}$, $m = 10\ \text{kg}$, $S_B = 100\ \text{cm}^2$, $g = 10\ \text{N} \cdot \text{kg}^{-1}$

Les capacités thermiques du gaz seront supposées indépendantes de la température.

On rappelle que : $R = C_{pm} - C_{vm}$ et $\gamma = C_{pm}/C_{vm}$ avec : C_{pm} et C_{vm} : capacités thermiques molaires, respectivement à pression et à volume constants du gaz.

Les différentes transformations seront supposées réversibles.

On imagine un cylindre aux parois diathermanes (perméables à la chaleur), fermé par un piston. Le piston, de masse négligeable, peut glisser sans frottement entre 2 cales A et B, sa section est S. Dans l'état initial, le piston est en A, le cylindre renferme un volume V_A d'air supposé gaz parfait, de coefficient γ, à la température de l'extérieur : T_0, pression P_0, (gaz dans l'état 0 : P_0, V_A, T_0).



On place une masse *m* sur le piston et on chauffe très doucement le gaz par un moyen approprié, non représenté sur le schéma, jusqu'à ce que le piston décolle de la cale A. (gaz dans l'état 1 : P_1, V_A, T_1)

Puis, on maintient le chauffage jusqu'à ce que le piston arrive juste en B (gaz dans l'état 2 : P_2, V_B, T_2), le chauffage est alors arrêté.

On ôte *m* et on laisse refroidir l'ensemble jusqu'à ce que le piston décolle juste de B (gaz dans l'état 3 : P_3, V_B, T_3).

On laisse toujours refroidir jusqu'à la température T_0 ; alors, le piston revient en A (gaz dans l'état 0), le cycle est terminé.

36) Exprimer les capacités thermiques à pression et à volume constants C_p et C_v du gaz en fonction de *n* (quantité de matière de gaz enfermé), *R*, γ, puis en fonction de P_0, V_A, T_0 et γ.

37) Quelle est la nature de la transformation de 0 à 1 subie par le gaz ?

38) Exprimer la pression P_1 et la température T_1 en fonction de P_0, T_0, *m, g, S*. Faire l'application numérique.

39) Exprimer la quantité de chaleur (transfert thermique) Q_0^1 reçue par le gaz au cours de cette transformation en fonction de C_P ou C_V, T_1, T_0 puis P_0, T_1, T_0, V_A, γ. Faire l'application numérique.

40) Quelle est la nature de la transformation 1 à 2 subie par le gaz ?

41) Exprimer la température T_2 en fonction de T_1, V_A, V_B. Faire l'application numérique.

42) Exprimer la quantité de chaleur (transfert thermique) Q_1^2 reçue par le gaz au cours de cette transformation en fonction de C_P ou C_V, T_1, T_2 puis P_0, T_0, T_1, T_2 V_A, γ. Faire l'application numérique.

43) Quelles sont les natures des transformations 2 à 3 et 3 à 0 subies par le gaz ?

44) Exprimer le travail W échangé par ce « moteur » avec l'extérieur, au cours du cycle, en fonction de *m, g*, V_A, V_B, *S*. Faire l'application numérique.

45) Exprimer le rendement de ce « moteur » en fonction des différents transferts d'énergie. Faire l'application numérique.

46) Tracer l'allure du diagramme de Clapeyron d'un cycle.

47) Retrouver, d'après le diagramme, le travail *W* calculé précédemment.

48) Exprimer le rendement d'un moteur fonctionnant selon un cycle de Carnot entre les températures T_0 et T_2 puis le calculer.

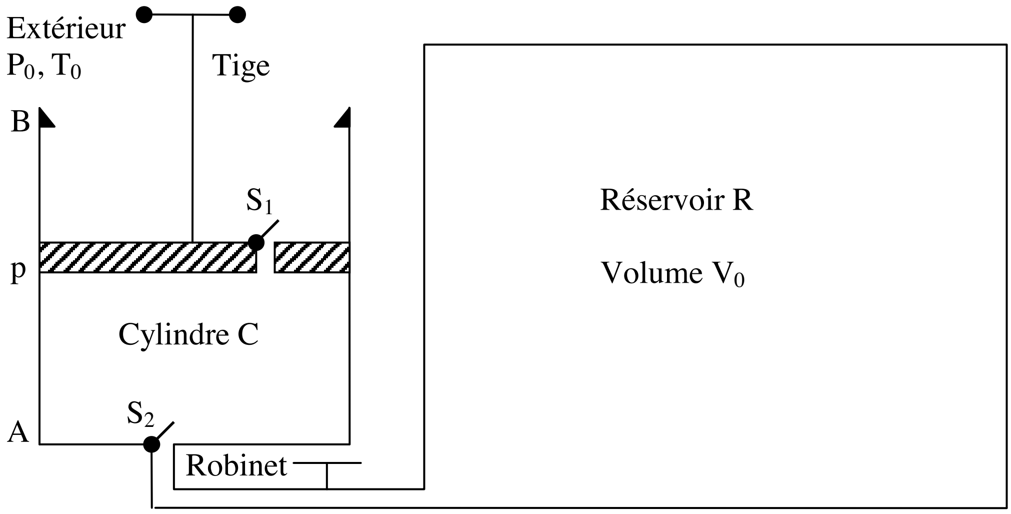
Pompe à vide

Le schéma suivant représente, en coupe, un réservoir R, un cylindre C (leurs parois sont diathermanes, c'est-à-dire perméables à la chaleur) et un piston P dont la course est limitée par le fond A et la cale B.

Quand le piston est en A, le volume du cylindre limité par le piston est V_A , quand le piston est en B : V_B .

Le système est de plus muni de deux soupapes : S_1 permettant le passage du gaz uniquement de C vers l'extérieur et S_2 uniquement de R vers C, et ce, dès que la différence de pression entre les parties inférieure et supérieure de la soupape est positive.

Le cylindre est relié, par un tube de volume négligeable devant les autres volumes du système, au réservoir R de volume V_0 , très supérieur à V_B , contenant de l'air, supposé gaz parfait, dans lequel on souhaite «faire le vide ».



49) Dans l'état initial, le piston est en B, le cylindre et le réservoir contiennent de l'air à la pression atmosphérique P_0 et à la température T_0 . On pousse le piston jusqu'en A exactement contre le fond (on considère qu'ici $V_A = 0$) et on le ramène en B assez lentement pour que la température reste T_0 . Expliquer les différents transferts de gaz au cours de cet aller-retour. Montrer que la pression P_1 dans R quand le piston revient en B est $P_1 = P_0 \dfrac{V_0}{V_0 + V_B}$

50) Si les transferts de gaz s'effectuent encore de la même façon, exprimer littéralement la pression P_2 après un deuxième aller-retour du piston.

51) Donner, dans ce cas, la forme générale de P_n après le *n*ième aller-retour. Quelle est la limite de P_n quand $n \to \infty$?

52) En réalité, quand le piston est en A, le volume V_A entre le piston et le fond n'est pas nul. La limite théorique précédente ne peut pas être atteinte. Pourquoi ? Déterminer la véritable limite théorique de cette pompe à vide. Pourquoi appelle-t-on V_A le « volume nuisible »?

53) Quel est, en supposant disposer d'une pompe idéale ($V_A = 0$), le travail théorique minimum nécessaire pour faire le vide parfait dans R ?

A ÉLECTRICITÉ

Détermination de *r*

1) La tension aux bornes de la bobine a pour expression :

$$\boxed{u(t) = ri(t) + L\frac{di}{dt}}$$

2) En régime permanent, la bobine se comporte comme une résistance pure r. La tension aux bornes de R est celle d'un diviseur de tension :

$$U_R = E_0 \frac{R}{R + r_0 + r}$$

La mesure de U_R permet de déterminer la valeur de r :

$$\boxed{r = -r_0 + R\left(\frac{E_0}{U_R} - 1\right)}$$

Application numérique :

$$\boxed{r = 29{,}4\ \Omega}$$

Détermination de *r* et *L* à partir d'un oscillogramme

3) Le GBF délivre une tension sinusoïdale de 10 V crête à crête, donc d'amplitude :

$$\boxed{U_e = 5\ \text{V}}$$

Sur l'oscillogramme, on lit l'amplitude U_R de la tension $u_R(t)$:

$$\boxed{U_R = 2{,}5\ \text{V}}$$

4) Dans la résistance R, la tension U_R et l'intensité I sont proportionnelles :

$$\boxed{I = \frac{U_R}{R} = 62{,}5\ \text{mA}}$$

5) Par définition, l'impédance Z d'un dipôle est le rapport de la tension U à ses bornes et de l'intensité I du courant qui le traverse :

$$\boxed{Z = \frac{U}{I}}$$

Le dipôle AM branché sur le GBF a donc pour impédance Z_{AM} :

$$\boxed{Z_{\text{AM}} = \frac{U_e}{I} = 80\ \Omega}$$

6) Entre les dates 0 et $T/4$, les tensions $u_R(t)$ et $u_e(t)$ sont toutes deux positives et croissantes.

La tension $u_e(t)$ atteint son maximum avant $u_R(t)$, elle est donc en avance sur $u_R(t)$.