Jour n^{o}1

Exercice 1.1

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 2 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \\ u_0 = 2. \end{cases}$$

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 4$.

2) Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 1.2

On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace.
On considère un plan (P) d'équation $ax + by + cz + d = 0$ et un point A de coordonnées $(x_A; y_A; z_A)$. Le but de cet exercice est de montrer que la distance du point A au plan (P) est le réel :

$$d(A; (P)) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

On appelle H le projeté orthogonal de A sur (P) et $\vec{n}$ un vecteur normal à (P).

1) Montrer que pour tout point M du plan (P), $AH \leq AM$.

On définit alors la distance $d(A; (P))$ du point A au plan (P) comme étant la longueur AH.

2) a) Montrer que $\left|\vec{n} \cdot \overrightarrow{AH}\right| = AH \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

b) Montrer que $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AH} = -ax_A - by_A - cz_A - d$.

c) Conclure.

3) Application numérique
On considère le plan (P) de vecteur normal $\vec{n}\,(3; 4; -2)$ et passant par le point A de coordonnées $(1; 0; 2)$.
Calculer la distance entre le point E de coordonnées $(1; 0; 4)$ et le plan (P).

Exercice 1.3 - Spécialité

1) Préliminaires
Soit k un entier naturel non nul et A une matrice carrée d'ordre k.

a) Soit P une matrice inversible d'ordre k. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP.$$

b) On suppose maintenant que $k = 2$ et que A est une matrice diagonale. On appelle a_1 et a_2 ses éléments diagonaux :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}.$$

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$A^n = \begin{pmatrix} a_1^n & 0 \\ 0 & a_2^n \end{pmatrix}.$$

2) Application
On considère deux suites (u_n) et (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{3}{4}v_n \\ v_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}v_n \end{cases} \quad \text{avec} \quad u_0 = 0 \quad \text{et} \quad v_0 = 1.$$

On pose $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

a) Donner U_0 puis calculer U_1.

b) Déterminer une matrice A telle que le système précédent ait une écriture matricielle de la forme $U_{n+1} = AU_n$.

c) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $U_n = A^nU_0$.

d) Soient les matrices :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

i) Justifier que P est inversible et donner P^{-1} sa matrice inverse.

ii) Calculer PDP^{-1}.

e) i) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer l'expression de A^n puis celle de U_n en fonction de n.

ii) Calculer les limites des suites (u_n) et (v_n).

Exercice 1.1 ♣♣

Énoncé

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 2 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \\ u_0 = 2. \end{cases}$$

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 4$.

2) Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Analyse stratégique de l'énoncé

Il s'agit ici de montrer que la suite donnée est convergente. Cet exercice est classique et ne présente pas de réels problèmes techniques. La difficulté réside dans le fait que les questions ne sont pas détaillées.

1) L'enjeu de cette question est de trouver la bonne méthode de démonstration. Ici, la suite (u_n) est définie par récurrence. On ne lui connaît aucune autre propriété. Le premier réflexe est de calculer $u_n - 4$. Mais on voit immédiatement que ce calcul ne mène nulle part. Il ne reste à notre disposition que la démonstration par récurrence. Le quantificateur *pour tout n* nous dirige également vers un tel procédé. La preuve en elle-même ne pose pas de réel problème.

↪ La démonstration par récurrence est une technique très utilisée lorsque l'on travaille avec des suites et que l'on doit prouver la validité de propriétés *pour tout entier n*. Il faut donc l'avoir à l'esprit dès que l'on aborde ce genre d'exercice. Bien souvent, si la preuve directe ne donne rien, c'est le seul recours qui reste pour arriver à ses fins.

> Commentaire du professeur
>
> La démonstration par récurrence vue en terminale est une méthode de démonstration qu'il est impératif de maîtriser. Elle est utilisée dans tous les domaines d'études des mathématiques.

2) Cette question n'est pas guidée. Une bonne connaissance des théorèmes de convergence (et en terminale, il y en a peu) est nécessaire. Il faudra penser à réunir toutes les conditions utiles à son application. La question 1) est utile à la démonstration mais ne suffit pas à conclure. Toutefois, elle peut être un bon indicateur du théorème à utiliser. Pour la détermination de la limite, il faudra penser à bien justifier la méthode de calcul.

↪ On se rappellera que les résultats démontrés dans les différentes questions sont souvent utiles pour la suite de l'exercice. Il faut donc avoir une bonne vue d'ensemble du travail qui a déjà été accompli. C'est pour cette raison qu'une mise en valeur des conclusions peut s'avérer très efficace pour repérer les informations dont on pourrait avoir besoin.

Corrigé

1) On fait une démonstration par récurrence.

> Commentaire du professeur
>
> Dans toute démonstration par récurrence, le plus important est de bien préciser l'hypothèse de récurrence. Dans certains cas, on devra traduire l'énoncé écrit « en français » en langage mathématique. Ici, l'hypothèse de récurrence est clairement donnée par l'énoncé.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit P_n la propriété : « $u_n \leq 4$ ».

– *Initialisation* : $u_0 = 2 \leq 4$ donc P_0 est vraie.

– *Hérédité* : supposons avoir trouvé un entier n tel que P_n est vraie.

$$\begin{aligned} u_n \leq 4 &\Leftrightarrow \frac{1}{2}u_n \leq 2 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}u_n + 2 \leq 4 \\ &\Leftrightarrow u_{n+1} \leq 4. \end{aligned}$$

Donc P_{n+1} est vraie.

– *Conclusion* : le principe de récurrence permet d'écrire que :

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ u_n \leq 4.}$$

2) Cette question nécessite trois étapes.

∘ Déterminons les variations de la suite (u_n)

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{2}u_n + 2 \quad \text{et} \quad u_n \leq 4$$

donc :

$$-\frac{1}{2}u_n + 2 \geq 0.$$

On en déduit que $u_{n+1} - u_n \geq 0$.
Donc, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$.
D'où,

$$\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est croissante.}}$$

∘ Montrons que la suite est convergente

Nous venons de montrer que la suite (u_n) est croissante et majorée par 4.
Donc, d'après le théorème de convergence monotone,

$$\boxed{(u_n) \text{ converge vers une limite } \ell \leq 4.}$$

○ Déterminons la limite ℓ de (u_n)

Remarquons tout d'abord que la suite (u_{n+1}) converge vers ℓ.
Comme (u_n) converge vers ℓ alors la suite $\left(\frac{1}{2}u_n + 2\right)$ converge vers $\frac{1}{2}\ell + 2$. Donc (u_{n+1}) converge aussi vers $\frac{1}{2}\ell + 2$.
Par unicité de la limite d'une suite convergente, ℓ est solution de l'équation :

$$\ell = \frac{1}{2}\ell + 2.$$

Résolvons cette équation :

$$\ell = \frac{1}{2}\ell + 2 \;\Leftrightarrow\; \ell = 4.$$

Donc :

$$\boxed{(u_n) \text{ converge vers } 4.}$$

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir de l'utilisation du principe de récurrence pour démontrer des résultats sur les suites (ou sur tout résultat dépendant de n où $n \in \mathbb{N}$).

♡ Il faut se souvenir du théorème de convergence monotone pour les suites majorées ou minorées.

♡ Il faut se souvenir de la méthode pour déterminer la limite d'une suite définie par récurrence, suite dont on ne connaît pas l'expression en fonction de n, ce qui empêche un calcul direct.

Formulaire

• Le principe de récurrence

On considère une propriété que l'on note P_n qui dépend d'un entier naturel n. Cette méthode de démonstration comporte trois étapes :

○ Étape 1

On montre que la propriété est vraie pour un entier naturel n_0. C'est *l'initialisation.*

○ Étape 2

On montre que, si la propriété est vraie pour un entier $n \geq n_0$ quelconque alors elle est vraie au rang $n+1$ suivant. On dit que la propriété P_n est *héréditaire.*

○ Étape 3

Les étapes 1 et 2 ont permis de montrer que la propriété est vraie au départ (pour $n = n_0$) et est héréditaire ($P_n \Rightarrow P_{n+1}$) alors on en déduit que, pour tout entier $n \geq n_0$, la propriété P_n est vraie. C'est la *conclusion.*

Remarque

Ce principe de démonstration par récurrence est un axiome, c'est-à-dire une propriété évidente et admise sans démonstration.

- Soit (u_n) une suite de réels et ℓ un réel.
  (i) La suite (u_n) *tend vers* ℓ si, et seulement si, tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes u_n pour n suffisamment grand. On note :
  $$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell.$$
  (ii) La suite (u_n) *tend vers* $+\infty$ si, et seulement si, tout intervalle ouvert $]M;+\infty[$ contient tous les termes u_n pour n suffisamment grand. On note :
  $$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$
  (iii) La suite (u_n) *tend vers* $-\infty$ si, et seulement si, tout intervalle ouvert $]-\infty;M[$ contient tous les termes u_n pour n suffisamment grand. On note :
  $$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty.$$

- On considère une suite de réels (u_n).
  (i) La suite (u_n) *est dite majorée* si, et seulement si, il existe un réel M tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$.
  (ii) La suite (u_n) *est dite minorée* si, et seulement si, il existe un réel m tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq m$.
  (iii) La suite (u_n) *est dite bornée* si, et seulement si, elle est majorée et minorée.

- Caractérisation des suites bornées

(u_n) est bornée si, et seulement si, il existe un réel positif M tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq M$.

- Suite majorée, minorée ou bornée et convergente

Soient (u_n) une suite de réels convergeant vers un réel ℓ et m, M des réels.
  (i) Si (u_n) est minorée par un réel m alors $\ell \geq m$.
  (ii) Si (u_n) est majorée par un réel M alors $\ell \leq M$.
  (iii) Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m \leq u_n \leq M$ alors $m \leq \ell \leq M$.

- Théorème de convergence monotone

Une suite croissante (respectivement : décroissante) et majorée (respectivement : minorée) converge.

Exercice 1.2 ♣

Énoncé

On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace.
On considère un plan (P) d'équation $ax + by + cz + d = 0$ et un point A de coordonnées $(x_A; y_A; z_A)$. Le but de cet exercice est de montrer que la distance du point A au plan (P) est le réel :

$$d(A; (P)) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

On appelle H le projeté orthogonal de A sur (P) et $\vec{n}$ un vecteur normal à (P).

1) Montrer que pour tout point M du plan (P), $AH \leq AM$.

On définit alors la distance $d(A; (P))$ du point A au plan (P) comme étant la longueur AH.

2) a) Montrer que $\left|\vec{n} \cdot \overrightarrow{AH}\right| = AH \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

b) Montrer que $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AH} = -ax_A - by_A - cz_A - d$.

c) Conclure.

3) Application numérique
On considère le plan (P) de vecteur normal $\vec{n}\,(3; 4; -2)$ et passant par le point A de coordonnées $(1; 0; 2)$.
Calculer la distance entre le point E de coordonnées $(1; 0; 4)$ et le plan (P).

Analyse stratégique de l'énoncé

Le but de cet exercice est de déterminer une formule explicite permettant le calcul de la distance entre un point de l'espace et un plan. Il permet de revisiter différentes définitions du produit scalaire dans l'espace et se termine par une application numérique.

> Commentaire du professeur
>
> Pour une meilleure visualisation des différents problèmes à résoudre, il peut être judicieux de faire un dessin.

1) Dans cette question, la démonstration en elle-même ne pose pas de problème. C'est le cadre dans lequel on fait la preuve qui demande une attention particulière. Il faut faire en sorte de se ramener à un problème dans un plan bien choisi et, pour ce faire, il faut exclure le cas particulier où A est sur (P) ou le cas où M est confondu avec H.

$\hookrightarrow$ Une fois que le problème est bien cerné et que l'on a exclu tous les cas triviaux, la démonstration se ramène à une simple propriété des triangles rectangles : l'hypoténuse est le plus grand des côtés.

2) a) Ces deux premières questions ont pour but de calculer le produit scalaire de deux façons différentes en utilisant les différentes manières de définir le produit scalaire dans l'espace. Le calcul est rapide et ne pose pas de problème particulier. L'emploi de la valeur absolue induit une disjonction de cas qu'il faut clairement mettre en évidence.

$\hookrightarrow$ Une bonne observation de l'énoncé est nécessaire pour reconnaître dans l'expression à montrer la forme la plus adaptée pour le calcul.

b) On obtient ici l'autre expression du produit scalaire de $\vec{n}$ par $\overrightarrow{AH}$.

$\hookrightarrow$ Pour cette question, on pensera à s'assurer que l'on travaille dans un repère orthonormé.

c) Ce type de question nécessite un bilan des questions précédentes. On fera attention à l'utilisation de la valeur absolue. L'expression cherchée s'obtient ensuite assez facilement.

$\hookrightarrow$ Le point central de cette question est dans la connaissance de la propriété suivante : pour tout réel x, $|-x| = |x|$.

> Commentaire du professeur
>
> Les questions « bilan » peuvent parfois poser des difficultés. La synthèse de plusieurs démonstrations pour obtenir un résultat final n'est pas forcément une chose évidente. C'est pour cette raison qu'une mise en valeur des conclusions des questions précédentes permet un accès rapide aux informations utiles et de ne pas se détourner du but à atteindre.

3) Cette question est une simple application numérique. Il faudra toutefois déterminer l'équation du plan (P) pour pouvoir la réaliser.

$\hookrightarrow$ Cette question ne pose pas de problème particulier. Et elle montre qu'une fois connue, cette formule est simple d'utilisation.

Corrigé

1) On va distinguer deux cas : soit A est sur (P), soit il ne l'est pas.

∘ Si $A \in (P)$

Alors A et H sont confondus et, dans ce cas, $AH = 0 \leq AM$ pour tout point M du plan (P).

∘ Si $A \notin (P)$

Soit M un point du plan (P) différent du point H (sinon l'inégalité est immédiate : $AH = AM \leq AM$).