

Table des matières

I	Rappels de la théorie de la mesure	9
1	Espace de probabilité	9
2	Trois exemples typiques	12
2.1	Exemple 1 : N tirages à pile ou face	12
2.2	Exemple 2 : Infinité dénombrable de tirages à pile ou face	13
2.3	Exemple 3 : Tirage uniforme sur $(0, 1)$	15
3	Quelques propriétés utiles	16
4	Exercices	17
II	Variables aléatoires	21
1	Définition d'une variable aléatoire réelle	21
2	Exemples	23
2.1	Cas où Ω est fini	23
2.2	Pile ou face infini	24
3	Addition et multiplication de variables aléatoires	25
4	Fonction de répartition d'une variable aléatoire	28
5	Vecteurs aléatoires et notations	33
5.1	Vecteurs aléatoires	33
5.2	Remarque sur les notations	33
6	Exercices	34
III	Indépendance	37
1	Définitions générales	37
1.1	Définitions	37
1.2	Exemples	39
2	Lemme de Borel-Cantelli	40
3	Loi 0 – 1 de Kolmogorov	42
4	Exercices	45

IV	Espérance	49
1	Définition générale	49
2	Propriétés de l'espérance	53
3	Quelques formules usuelles retrouvées	56
4	Exercices	58
V	Modes de convergence	63
1	Les différents modes de convergence	63
2	Loi des grands nombres	65
3	Relations entre les modes de convergence	68
	3.1 Convergence presque sûre et convergence en probabilité	68
	3.2 Convergence \mathcal{L}^p , en probabilité et presque sûre	71
4	Intégrabilité uniforme	73
VI	Théorème central limite	77
1	Quelques théorèmes sur la convergence en loi	77
2	Fonction caractéristique	81
3	Théorème central limite	88
4	Exercices	94
VII	Espérance conditionnelle	97
1	Espérance conditionnelle sur des cas connus	97
	1.1 Cas simple des variables discrètes	97
	1.2 Variables absolument continues	99
2	Définition générale de l'espérance conditionnelle	100
3	Propriétés générales de l'espérance conditionnelle	103
4	Martingales	105
	4.1 Définitions	105
	4.2 Exemples	106
	4.3 Temps d'arrêt d'une martingale	108
	4.4 Exemple de la marche aléatoire non-équilibrée	112
	4.5 Exemple 2 : Singe écrivain	115
5	Théorème de convergence des martingales	116
	5.1 Enoncé du théorème	116
	5.2 Applications du théorème	118
	5.3 Preuve du théorème de convergence de Doob	120
6	Exercices	122

VIII Applications	127
1 Processus de branchements	127
1.1 L'approche par les fonctions génératrices	127
1.2 L'approche par les martingales	131
2 Files d'attente	131
IX Exercices supplémentaires	135
X Solutions des exercices	143
1 Rappels de la théorie de la mesure	143
2 Variables aléatoires	148
3 Indépendance	153
4 Espérance	163
5 Modes de convergence et TCL	175
6 Espérance conditionnelle	183
7 Solutions des exercices supplémentaires	192
Bibliographie	213
Index	215