Chapitre I. Rappels de la théorie de la mesure

Introduction

Ce chapitre a pour but de rappeler le formalisme issu de la théorie de la mesure nécessaire à la compréhension des probabilités. Ainsi nous rappelerons (sans démonstration) certains grands résultats de la théorie de la mesure et leur particularisation au cas des probabilités pour lesquelles certaines facilités se présentent. Ce chapitre nécessairement abstrait permet de fixer le cadre théorique ainsi que les notations qui seront utilisés dans le reste de ce livre. Par ailleurs, il permet d'introduire un langage probabiliste parallèle au langage d'analyse traditionnellement utilisé dans le cadre de la théorie de la mesure.

1 Espace de probabilité

Lors d'une expérience aléatoire, c'est-à-dire qui peut aboutir à différents résultats possibles, il est nécessaire de comprendre au moins deux choses : tout d'abord quel est l'ensemble des résultats possibles de l'expérience et ensuite quelles sont les quantités que l'on peut "mesurer" lors de l'expérience. On définit ainsi un espace de probabilité de la façon suivante :

Définition I.1 *Un espace de probabilité est défini par la donnée du triplet* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *:*

- Ω *est appelé "espace fondamental" ou "univers" : il s'agit de l'ensemble de tous les résultats possibles de l'expérience. Mathématiquement, il s'agit d'un ensemble qui peut donc être de cardinal fini, dénombrable ou non-dénombrable.*

- $\mathcal{F}$ *est une (également appelée tribu) sur* Ω *: il s'agit de l'ensemble des quantités mesurables sur* Ω*. Les éléments* E *de* $\mathcal{F}$ *sont appelés "événements".*

- $\mathbb{P}$ *est une mesure de probabilité définie sur* $\mathcal{F}$ *à valeurs dans* $[0, 1]$ *qui mesure "la possibilité" de réalisation de chaque événement* $E \in \mathcal{F}$.

Compte-tenu de leur définition mathématique, $\mathcal{F}$ et $\mathbb{P}$ doivent obéir aux propriétés suivantes :

- $\Omega \in \mathcal{F}$ et $\emptyset \in \mathcal{F}$.

- Si $E \in \mathcal{F}$ alors $\overline{E} \in \mathcal{F}$, où $\overline{E}$ désigne le complémentaire de E dans $\mathcal{F}$.

- Si $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ est une collection **dénombrable** d'ensembles vérifiant
$$\forall\, i \geq 0\ :\ E_i \in \mathcal{F} \text{ alors } E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{F}$$

- Si $(E_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une collection **dénombrable** d'ensembles vérifiant
$$\forall\, i \geq 0\ :\ E_i \in \mathcal{F} \text{ alors } = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{F}$$

Notons que seules les 3 premières propriétés sont nécessaires pour s'assurer que $\mathcal{F}$ est une σ-algèbre, les autres découlant de ces propriétés par action du complémentaire. Par ailleurs, les réunions (resp. intersections) finies d'ensembles s'obtiennent en complétant la liste avec une infinité de $\emptyset$ (resp. Ω). On parle de stabilité par complémentaire, stabilité par unions et intersections dénombrables de la σ-algèbre. Il est également courant d'appeler "événement fondamental" un élément de Ω, l'idée naïve commune étant de voir les événements possibles comme des regroupements d'événements fondamentaux. La mesure de probabilité $\mathbb{P}$ obéit aux propriétés suivantes :

- $$\begin{array}{cccc} \mathbb{P} & : & \mathcal{F} & \to & [0,1] \\ & & E & \mapsto & \mathbb{P}(E) \end{array}$$

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ (Une probabilité est une mesure finie)

- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$

- Si $(E_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une collection dénombrable d'événements (donc appartenant à $\mathcal{F}$) disjoints deux à deux ($E_i \cap E_j = \emptyset$) alors :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_i) \text{ (propriété dite de } \sigma\text{-additivité)}$$

En probabilité, lorsque $\mathbb{P}(E) = 0$ on dit parfois que l'événement E est quasi-impossible tandis que lorsque $\mathbb{P}(E) = 1$ on dit que l'événement est presque certain. Par ailleurs lorsque des événements $(E_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sont disjoints deux à deux on dit aussi qu'ils sont "incompatibles". L'utilisation de ces termes permet de se rapprocher des sens communs qui leurs sont associés mais il est indispensable de se rappeler de leurs sens mathématiques. Notons que, puisque $\Omega = E \cup \overline{E}$, on obtient :

$$\mathbb{P}\left(\overline{E}\right) = 1 - \mathbb{P}(E)$$

Notons également que la principale simplification avec la théorie de la mesure générale est que la mesure de probabilité $\mathbb{P}$ est toujours finie puisque $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

On rappelle également la définition d'une algèbre ensembliste :
On dit que $\mathcal{A}$ est une algèbre ensembliste sur un ensemble S si :

- $\emptyset \in \mathcal{A}$
- Si $A \in \mathcal{A}$ alors $\overline{A} \in \mathcal{A}$ (stabilité par complémentaire)
- $\forall\, n \geq 1$, si $(A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{A}^n$ alors $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$ (stabilité par union finie)

En particulier, on peut alors montrer que $S \in \mathcal{A}$ et que $\mathcal{A}$ est aussi stable par intersection finie. La seule différence avec les σ-algèbres sur S est que l'on n'autorise ici qu'une stabilité par réunion/intersection finie et non dénombrable.

2 Trois exemples typiques

2.1 Exemple 1 : N tirages à pile ou face

On réalise N lancers indépendants d'une pièce de monnaie possédant deux côtés identifiés à Pile (P) et Face (F) :

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_N) \text{ avec } \omega_i \in \{\mathrm{P}, \mathrm{F}\}\} = \{\mathrm{P}, \mathrm{F}\}^N$$

Ici Ω est un ensemble fini de cardinal 2^N et l'on prend donc comme tribu associée $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω. Chaque élément de $\mathcal{P}(\Omega)$ correspond à un tirage possible. La probabilité de chaque événement est donnée par la propriété d'indépendance des tirages :

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) = p^{\mathrm{Card}(\{i \leq N \,/\, \omega_i = \mathrm{P}\})}(1-p)^{\mathrm{Card}(\{i \leq N \,/\, \omega_i = \mathrm{F}\})}$$

où p est la probabilité de faire pile à chaque tirage. Il est alors immédiat de prouver que les axiomes requis pour définir un espace de probabilité sont réalisés. En particulier, on observe que :

$$\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i} p^i (1-p)^{N-i} = 1$$

La propriété de σ-additivité est immédiate. Notons que l'on peut alors s'intéresser à des événements plus compliqués (tant qu'ils restent dans la σ-algèbre). Par exemple, on peut définir les événements $(F_i)_{i\geq 1}$ par :

$$F_i = \{\omega \in \Omega \,/\, \omega_i = \text{Face}\} = \{\text{Faire face au } i^{\text{ième}} \text{ lancer}\}$$

Pour calculer leur probabilité on doit tenir compte des résultats possibles obtenus aux autres tirages :

$$\mathbb{P}(F_i) = \sum_{j=0}^{N-1} \binom{N-1}{j} p^j (1-p)^{N-1-j}(1-p) = 1-p$$

Autre exemple avec les événements $(R_i)_{i\geq 1}$ définis par :

$$\begin{aligned} R_i &= \{\text{Obtenir face pour la première fois au } i^{\text{ième}}\text{lancer}\} \\ &= \{\omega \in \Omega \,/\, \omega_1 = \cdots = \omega_{i-1} = P \text{ et } \omega_i = F\} \end{aligned}$$

On trouve alors $\mathbb{P}(R_i) = p^{i-1}(1-p)$. On peut alors en déduire la probabilité de l'événement R défini par :

$$R = \{\text{Obtenir au moins une fois face à l'issue du } N^{\text{ième}} \text{ lancer}\}$$

En effet les événements $(R_i)_{i\geq 1}$ sont des événements incompatibles et donc la propriété de σ-additivité donne :

$$\mathbb{P}(R) = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}(R_i) = \sum_{i=1}^{N} p^{i-1}(1-p) = 1 - p^N$$

2.2 Exemple 2 : Infinité dénombrable de tirages à pile ou face

Considérons une infinité dénombrable de tirages à pile ou face, c'est-à-dire $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ (l'ensemble des suites composées de 0 et de 1). On pourrait croire que l'on est en présence d'un problème discret puisqu'il s'agit de tirages à pile ou face mais en se rappelant que l'on peut identifier les nombres réels de $[0,1]$ avec leur développement en base 2 qui s'identifie avec une suite composée de 0 et de 1, on comprend finalement que Ω possède la puissance du continu. La σ-algèbre nécessaire pour l'étude de telles suites est définie par :

$$\mathcal{F} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=i}^{\infty} \mathcal{F}_j$$

où $\mathcal{F}_j$ est vu comme le plongement de l'ensemble fini $\mathcal{P}\left(\{0,1\}^j\right)$ dans $\mathcal{P}\left(\{0,1\}^{\mathbb{N}^*}\right)$ à l'aide du plongement canonique i de $(\{0,1\}^j)$ dans $\{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$:

$$\begin{array}{cccc} i & : & \{0,1\}^j & \rightarrow & \mathcal{P}\left(\{0,1\}^{\mathbb{N}^*}\right) \\ & & \omega = (\omega_1, \ldots, \omega_j) & \mapsto & i(\omega) = \{\tilde{\omega} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}^*} / \forall\, 1 \leq i \leq j \,:\, \tilde{\omega}_i = \omega_j\} \end{array}$$

que l'on étend par la suite canoniquement à l'ensemble fini des parties $\mathcal{P}\left(\{0,1\}^j\right)$ par :

$$\begin{array}{cccc} I & : & \mathcal{P}\left(\{0,1\}^j\right) & \rightarrow & \mathcal{P}\left(\{0,1\}^{\mathbb{N}^*}\right) \\ & & A = \bigcup_{k=1}^{|A|} \{a_k\} & \mapsto & I(A) = \bigcup_{k=1}^{|A|} i(a_k) \end{array}$$

pour enfin définir $\mathcal{F}_j = I\left(\mathcal{P}\left(\{0,1\}^j\right)\right)$. Notons que par définition, on a également les inclusions triviales :

$$\forall\, i \leq j \;:\; \mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}_j$$

Afin d'éviter d'alourdir les notations, il est d'usage (et nous le ferons désormais) d'identifier $\mathcal{P}\left(\{0,1\}^j\right)$ avec $\mathcal{F}_j$ sans nécessairement distinguer les deux notations. Le choix de cette tribu $\mathcal{F}$ signifie que l'on peut extraire une suite $(\mathcal{F}_{j_i})_{i\in\mathbb{N}}$ pour laquelle l'événement doit appartenir à chaque $\mathcal{F}_{j_i}$. En d'autres termes, on **impose de voir tout événement comme une limite d'une suite d'événements n'impliquant qu'un nombre fini de tirages**. Cela limite donc les événements que l'on peut étudier mais sans non plus se restreindre uniquement à un nombre fini et fixé de tirages. Il reste ensuite à s'interroger sur les ensembles pouvant appartenir à cette σ-algèbre. Ainsi par exemple, les ensembles suivants :

- $A =$ "Avoir toujours obtenu plus de 1 que de 0"
- $B =$ "Obtenir un rapport de 1 sur 0 qui tend vers 1"
- $C =$ "Avoir une succession consécutive de 0 de longueur arbitrairement grande"

ne sont pas de façon évidente des éléments de la tribu $\mathcal{F}$. La fonction de probabilité $\mathbb{P}$ définie sur $\mathcal{F}$ consiste à demander que sur chaque $\mathcal{F}_N$: $\mathbb{P}((\omega_i)_{1\leq i\leq N}) = p^{\mathrm{Card}(\{i\leq N \,/\, \omega_i=1\})}(1-p)^{\mathrm{Card}(\{i\leq N \,/\, \omega_i=0\})}$ ce qui correspond à supposer que les tirages effectués sont indépendants et que la probabilité de succès (i.e. $\omega_i = 1$) vaut $p \in [0,1]$. Par construction, on peut alors attribuer à un événement $A \in \mathcal{F}$ la probabilité correspondant à la limite des probabilités calculées sur $\mathcal{F}_n$ des événements $A_n \in \mathcal{F}_n$ associés à A.

Remarque : Il est important de comprendre que la formule naïve $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i$ ne définit pas une tribu (cet ensemble n'est pas stable par réunion dénombrable). En effet, prenons par exemple $\Omega = \{a,b,c\}$ et $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{a\}, \{b,c\}, \Omega\}$ et $\mathcal{B} = \{\emptyset, \{c\}, \{a,b\}, \Omega\}$ qui sont deux σ-algèbres sur Ω. Alors la réunion $\mathcal{A}\cup\mathcal{B} = \{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{b,c\}, \{a,b\}, \Omega\}$ n'est pas stable par réunion et n'est donc pas une σ-algèbre. En revanche, on peut montrer que $\mathcal{F} = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty}\bigcup\limits_{j=i}^{\infty} \mathcal{F}_j$ est une σ-algèbre. En effet on a bien les propriétés suivantes :

- **Stabilité par complémentaire** : Soit $A \in \mathcal{F}$ alors pour $i \in \mathbb{N}$, il existe $j \geq i$ tel que $A \in \mathcal{F}_j$. Comme $\mathcal{F}_j$ est une σ-algèbre, $\overline{A} \in \mathcal{F}_j$ et donc pour tout $i \in \mathbb{N}$ on a trouvé $j \geq i$ tel que $\overline{A} \in \mathcal{F}_j$ ce qui signifie exactement que $\overline{A} \in \mathcal{F}$.

- **Présence de l'ensemble vide** : De façon triviale $\emptyset \in \mathcal{F}_j$ pour tout $j \in \mathbb{N}$ donc $\emptyset \in \mathcal{F}$.

- **Stabilité par réunions dénombrables** : Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite de $\mathcal{F}$ et soit $i \in \mathbb{N}$ fixé. Par définition, pour tout $n \geq 1$, il existe $j_n \geq i$ tel que $A_n \in \mathcal{F}_{j_n}$. Ainsi $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_{j_n} \subset \bigcup\limits_{j=i}^{\infty} \mathcal{F}_j$. Donc pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ appartient à $\bigcup\limits_{j=i}^{\infty} \mathcal{F}_j$ ce qui signifie exactement que $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

2.3 Exemple 3 : Tirage uniforme sur $(0,1)$

On tire aléatoirement et uniformément un nombre réel sur l'intervalle ouvert $(0,1)$. $\Omega = (0,1)$ et $\mathcal{F} = Bor(0,1)$. La mesure de probabilité est alors la mesure de Lebesgue. Dans cet ouvrage, on ne traitera que des Boréliens et de la mesure de Lebesgue dans le cas d'un univers Ω défini par des réunions dénombrables d'intervalles. Rappelons ici que la tribu Borélienne est la plus petite (au sens de l'inclusion) σ-algèbre contenant les ouverts de $(0,1)$ ou de façon équivalente la plus petite σ-algèbre contenant les intervalles ouverts de $(0,1)$. Elle est engendrée par le π-système (i.e. une famille non vide de parties stable par intersections finies) formé par l'ensemble $\mathcal{X}$ des intervalles de la forme $(-\infty, a)$ avec $a \in \mathbb{R}$, ce qui signifie que la σ-algèbre $\sigma(\mathcal{X})$ engendrée par $\mathcal{X}$ (i.e. la plus petite σ-algèbre contenant $\mathcal{X}$) est la tribu Borélienne tout entière. Par ailleurs la mesure de Lebesgue associée est la mesure (unique) pour laquelle les intervalles bornés (a,b) ont pour mesure $b - a$. Son existence est assurée par le théorème d'extension de Carathéodory :

Théorème I.1 *Théorème d'extension de Carathéodory : Soit μ_0 une mesure définie sur une algèbre (donc stable par réunions finies et complémentaire) $\mathcal{A}$ de S à valeurs dans $[0, +\infty)$ et σ-additive vérifiant $\mu_0(S) < +\infty$, alors il existe une unique mesure μ définie sur la σ-algèbre engendrée par $\mathcal{A}$ qui coïncide avec μ_0 sur $\mathcal{A}$.*

Dans le cas de la mesure de Lebesgue sur un intervalle $S = (a, b)$, l'algèbre $\mathcal{A}$ peut être choisie comme l'algèbre composée des réunions finies d'intervalles de (a, b). Son extension est donc unique et s'appelle mesure de Lebesgue. Nous rappelons également le théorème d'unicité suivant :

Théorème I.2 *Lemme d'unicité : Soient μ_1 et μ_2 deux mesures définies sur $\sigma(\mathcal{A}(S))$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ telles que $\mu_1(S) = \mu_2(S) < \infty$ et coïncidant sur l'algèbre $\mathcal{A}(S)$, alors $\mu_1 = \mu_2$ sur la σ-algèbre $\sigma(\mathcal{A}(S))$ toute entière.*

En ce qui concerne la mesure de Lebesgue, il suffira donc de montrer que deux mesures finies coïncident sur les intervalles (ou tout autre système engendrant la tribu Borélienne) pour montrer qu'elles sont égales.

3 Quelques propriétés utiles

Théorème I.3 *On rappelle les propriétés suivantes :*

1. *Propriété de monotonie : Si $F \subset E$ alors $\mathbb{P}(F) \leq \mathbb{P}(E)$*

2. *Si E et F sont incompatibles alors $\mathbb{P}(E \cup F) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F)$.*

3. *Propriété de σ-sous additivité : $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_n)$. Cette propriété est également valable pour un nombre fini d'ensembles en complétant avec $\emptyset$.*

4. *Propriété de continuité : $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{n=1}^{N} E_n\right) \underset{N\to\infty}{\nearrow} \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n\right)$ que les événements $(E_n)_{n\geq 1}$ soient indépendants, disjoints ou non.*

5. *Propriété de continuité 2 : $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{n=1}^{N} E_n\right) \underset{N\to\infty}{\searrow} \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n\right)$ que les événements $(E_n)_{n\geq 1}$ soient indépendants, disjoints ou non.*

6. *Si les événements $(E_n)_{n\geq 1}$ sont incompatibles alors on a :*

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{N} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_n).$$