■■ Résumé de cours

■ Implication, équivalence

Définition : *Soient P et Q deux propositions.*

- $P \Rightarrow Q$ *signifie* (Q *ou* (*non*P)).
- $P \Leftrightarrow Q$ *signifie* (($P \Rightarrow Q$) *et* ($Q \Rightarrow P$)).

■ Récurrence

Soit $\mathscr{P}(n)$ une propriété définie pour tout entier naturel n.

Principe de récurrence
S'il existe un entier $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que :

- $\mathscr{P}(n_0)$ est vraie,
- si $\mathscr{P}(n)$ est vraie alors $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie,

alors $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.

Récurrence double
S'il existe un entier $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que :

- $\mathscr{P}(n_0)$ et $\mathscr{P}(n_0+1)$ sont vraies,
- si $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ sont vraies alors $\mathscr{P}(n+2)$ est vraie,

alors $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.

Remarque : Démontrer par récurrence double une propriété $\mathscr{P}(n)$ revient à démontrer par récurrence simple la propriété $\mathscr{Q}(n)$: "$\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ sont vraies".

Récurrence forte
S'il existe un entier $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que :

- $\mathscr{P}(n_0)$ est vraie,
- si $\mathscr{P}(n_0)$, $\mathscr{P}(n_0+1)$, ...et $\mathscr{P}(n)$ sont vraies alors $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie,

alors $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.

■ Sommes

Définition : *Soient p et n des entiers naturels tels que $0 \leqslant p \leqslant n$. Soient x_p, x_{p+1},..., x_n des réels. Alors :*

$$\sum_{k=p}^{n} x_k = x_p + x_{p+1} + \ldots + x_n.$$

$x_p + x_{p+1} + \ldots + x_n$ *est l'écriture en extension de la somme.*

Proposition 1.1.— Règles de calcul —. Soient p et n des entiers naturels tels que $0 \leqslant p \leqslant n$. Soient x_p, x_{p+1},..., x_n, y_p, y_{p+1},..., y_n des réels.

- $\displaystyle\sum_{k=p}^{n}(x_k + y_k) = \sum_{k=p}^{n} x_k + \sum_{k=p}^{n} y_k$.
- Si $p \leqslant i < n$, $\displaystyle\sum_{k=p}^{i} x_k + \sum_{k=i+1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} x_k$.
- Pour tout réel λ, $\displaystyle\sum_{k=p}^{n}(\lambda x_k) = \lambda \sum_{k=p}^{n} x_k$.
- Pour tout réel λ, $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \lambda = (n-p+1)\lambda$.

Remarque : Dans la somme $\displaystyle\sum_{k=p}^{n}$..., le nombre de termes est $n-p+1$.

Sommes usuelles

Proposition 1.2.— Sommes des entiers, des carrés, des cubes des entiers —. Pour tout entier naturel n,

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$;
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Remarque : On a aussi pour $n \in \mathbf{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$,
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Proposition 1.3.— Somme des q^k pour $0 \leqslant k \leqslant n$ et q réel —. Pour tout entier naturel n,

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + ... + q^n = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si} \quad q \neq 1 \\ (n+1)q & \text{si} \quad q = 1 \end{cases}$$

Remarque : C'est un cas particulier de somme de termes d'une suite géométrique (**proposition 5.4**).

■ Produits

Définition : *Soient p et n des entiers naturels tels que $0 \leqslant p \leqslant n$. Soient x_p, x_{p+1},..., x_n des réels. Alors :*

$$\prod_{k=p}^{n} x_k = x_p x_{p+1} ... x_n.$$

■ Factorisation de $a^n - b^n$

Proposition 1.4.— $\forall (a,b) \in \mathbf{C}^2, \forall n \in \mathbf{N}^*$, on a :

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + ... + ab^{n-2} + b^{n-1} = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k.$$

Remarques : • La formule précédente s'écrit aussi : $a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$.

• Pour $n = 2$ on obtient $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, et pour $n = 3$, $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.

■ Coefficients binomiaux et formule du binôme de Newton

Définition : *Soient p et n deux entiers.*

- *Si* $0 \leqslant p \leqslant n$, $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.
- *Si* $p > n$, $\binom{n}{p} = 0$.

Remarque : si $0 \leqslant n$, $\binom{n}{0} = 1$, si $1 \leqslant n$, $\binom{n}{1} = n$.

Proposition 1.5.— ■ $\forall n \in \mathbf{N}, \forall p \in \{0, 1, ..., n\}$, $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.

■ $\forall (n,p) \in \mathbf{N}^2$, $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$ (formule de Pascal).

Théorème 1.6.— Formule du binôme de Newton —.

$$\forall (a,b) \in \mathbf{C}^2, \forall n \in \mathbf{N}, \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Remarques : • En échangeant a et b dans la formule précédente, on obtient aussi :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

• On obtient le développement de $(a-b)^n$ en remplaçant b par $-b$ dans la formule précédente.

$$(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k (-b)^{n-k}.$$

Corollaire 1.7.— $\forall n \in \mathbf{N}$, $\quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \quad$ et $\quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$.

Méthodes

Démontrer

Méthode 1.1.— Démontrer une implication
Pratiquement, pour démontrer l'implication $P \Rightarrow Q$, on suppose que P est vraie et on montre qu'alors Q est vraie.

Exemple : voir chapitre 2 (ensembles, applications)

Méthode 1.2.— Démontrer une équivalence
Pour démontrer l'équivalence $P \Leftrightarrow Q$, on peut :

- raisonner par équivalences successives,
- démontrer les deux implications $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$.

Exemple : voir chapitre 2 (ensembles, applications)

Méthode 1.3.— Faire une démonstration par l'absurde
Soit $\mathscr{P}$ une propriété à démontrer. Démontrer par l'absurde que $\mathscr{P}$ est vraie c'est supposer que $\mathscr{P}$ est fausse et montrer qu'alors on obtient une contradiction.

Mise en œuvre : exercice 6.7, exercice 6.11.

Méthode 1.4.— Faire une démonstration par récurrence
Soit $\mathscr{P}(n)$ une propriété définie pour tout entier naturel n. Il s'agit de démontrer que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$ en utilisant le principe de récurrence.

$\boxed{1}$ On définit précisément la propriété $\mathscr{P}(n)$ à démontrer.
$\boxed{2}$ On annonce qu'on va démontrer $\mathscr{P}(n)$ par récurrence, en précisant pour quelles valeurs de n on va le faire (pour tout entier $n \geqslant n_0$).
$\boxed{3}$ On démontre $\mathscr{P}(n_0)$.
$\boxed{4}$ On démontre que si $\mathscr{P}(n)$ est vraie, alors $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
$\boxed{5}$ On conclut.

Exemple : Montrons que : $\forall n \geqslant 4, \quad 2^n \geqslant n^2$.
Soit, pour $n \in \mathbf{N}$, $\mathscr{P}(n)$ la propriété "$2^n \geqslant n^2$". Démontrons par récurrence que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 4$.

- $2^4 = 16$ et $4^2 = 16$ donc $\mathscr{P}(4)$ est vraie.

- Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour un entier $n \geqslant 4$. On a alors $2^n \geqslant n^2$. En multipliant par 2 les deux membres de cette inégalité, il vient $2^{n+1} \geqslant 2n^2$. Comparons alors $2n^2$ et $(n+1)^2$. Pour tout x réel, $2x^2 - (x+1)^2 = x^2 - 2x - 1$. C'est un trinôme du second degré de racines $1-\sqrt{2}$ et $1+\sqrt{2}$. Il est donc strictement positif pour tout $x > 1+\sqrt{2}$. En particulier, comme $n \geqslant 4 > 1+\sqrt{2}$, on a $2n^2 - (n+1)^2 > 0$ donc $2n^2 > (n+1)^2$.
  On a obtenu $2^{n+1} \geqslant 2n^2 > (n+1)^2$, donc $2^{n+1} \geqslant (n+1)^2$ et $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

D'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 4$.

■ Calculer une somme

> **❑ Méthode 1.5.— Calculer une somme en utilisant les formules des sommes usuelles**
> On utilise les règles de calculs sur les sommes (**proposition 1.1**) et on se ramène au calculs de sommes usuelles (**proposition 1.2**).

Exemples : Soit $S = \sum_{k=0}^{n}(2k-1)$. Alors $S = 2\sum_{k=0}^{n} k - \sum_{k=0}^{n} 1$.

On sait que $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ (**proposition 1.2**).

Dans la somme $\sum_{k=0}^{n} 1$, le nombre de termes est $(n+1)$. On a donc $\sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$ (**proposition 1.1**).

Finalement $S = 2\frac{n(n+1)}{2} - (n+1) = n^2 - 1$.

Soit $T = \sum_{k=1}^{n-1}(3k-2)(1-k)$.

Pour pouvoir se ramener à des sommes usuelles, on commence par développer le produit $(3k-2)(1-k)$.

$T = \sum_{k=1}^{n-1}(-3k^2 + 5k - 2) = -3\sum_{k=1}^{n-1} k^2 + 5\sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{n-1} 2$

On sait que, pour tout entier n, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (voir la **proposition 1.2** et la remarque qui suit). En remplaçant n par $n-1$ dans cette formule, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{(n-1)(n)(2(n-1)+1)}{6} = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \text{ pour } n \geqslant 2.$$

De même, en remplaçant n par $n-1$ dans la formule $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, il vient :

$$\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{(n-1)n}{2} \text{ pour } n \geqslant 2.$$

Méthodes

Dans la somme $\sum_{k=1}^{n-1} 2$, le nombre de termes est $(n-1)$. On a donc $\sum_{k=1}^{n-1} 2 = 2(n-1)$ (d'après la **proposition 1.1**), et donc :

$$T = -3\frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + 5\frac{(n-1)n}{2} - 2(n-1) = \frac{(n-1)}{2}(-2n^2+6n-4) = (n-1)^2(2-n).$$

> ❑ **Méthode 1.6.— Calculer une somme en faisant un changement d'indice**
>
> Soit r un entier. Faire le changement d'indice $j = k + r$ dans la somme $\sum_{k=p}^{n} x_k$, c'est remplacer k par $j - r$ dans le terme général x_k et changer les bornes de la somme : p en $p + r$ et n en $n + r$, c'est-à-dire écrire $\sum_{k=p}^{n} x_k = \sum_{j=p+r}^{n+r} x_{j-r}$.

Exemple : Soit à calculer la somme $\sum_{k=0}^{n}(k+1)^2$.

Posons $j = k + 1$. Le terme général de la somme est $(k+1)^2 = j^2$. Lorsque $k = 0$, on a $j = 1$ et lorsque $k = n$, on a $j = n + 1$. On a bien $\{k, 0 \leqslant k \leqslant n\} = \{j-1, 1 \leqslant j \leqslant n+1\} = \{0, 1, ..., n\}$.

Il vient $\sum_{k=0}^{n}(k+1)^2 = \sum_{j=1}^{n+1} j^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$.

Remarque : On aurait pu calculer $\sum_{k=0}^{n}(k+1)^2$ en développant $(k+1)^2$ (**méthode 1.5**), mais cela aurait été plus long.

> ❑ **Méthode 1.7.— Calculer une somme télescopique**
>
> Une somme télescopique est une somme du type $\sum_{k=0}^{n}(x_{k+1} - x_k)$, dans laquelle n est un entier naturel, x_0, x_1,..., x_n, x_{n+1} sont des réels.
>
> On a : $\sum_{k=0}^{n}(x_{k+1} - x_k) = x_{n+1} - x_0$ (différence entre le dernier terme et le premier terme).
>
> En effet $\sum_{k=0}^{n}(x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=0}^{n} x_{k+1} - \sum_{k=0}^{n} x_k = \sum_{i=1}^{n+1} x_i - \sum_{k=0}^{n} x_k = x_{n+1} - x_0$
>
> (on a posé $i = k + 1$ dans la somme $\sum_{k=0}^{n} x_{k+1}$).
>
> Pour calculer une somme télescopique, on peut écrire le changement d'indice comme ci-dessus, ou écrire directement le résultat obtenu comme dans l'exemple qui suit.

Exemple : Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Alors :

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n} (\ln(k) - \ln(k+1)) = \ln(1) - \ln(n+1) = -\ln(n+1)$$

car il s'agit d'une somme télescopique.

■ Développer $(a+b)^n$ pour n donné, par la formule du binôme

❑ Méthode 1.8.— Comment écrire le développement de $(a+b)^n$ par la formule du binôme

Soit n un entier naturel donné, supérieur ou égal à 2. Soient a et b deux nombres complexes. Le développement de $(a+b)^n$ est donné par la formule du binôme de Newton (**théorème 1.6**).

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

$\boxed{1}$ On calcule les valeurs numériques des coefficients binomiaux : on construit les $(n+1)$ premières lignes du triangle de Pascal et on lit les coefficients $\binom{n}{k}$ dans la $(n+1)$-ième ligne.

Pour construire le triangle de Pascal :

À l'intersection de la ligne de n et de la colonne de p, on note la valeur de $\binom{n}{p}$. Le coefficient $\binom{n+1}{p+1}$ est obtenu par la formule de Pascal : c'est la somme des coefficients $\binom{n}{p}$ et $\binom{n}{p+1}$ (**proposition 1.5**).

	0	1	2	3	...	p	$p+1$	...	n	$n+1$
0	1									
1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						
.										
.										
p	1	p								
$p+1$	1	$p+1$								
.										
.										
n	1	n				$\binom{n}{p}$	$\binom{n}{p+1}$	...	1	
$n+1$	1	$n+1$					$\binom{n+1}{p+1}$	...	$n+1$	1

$\boxed{2}$ On écrit le développement : $(a+b)^n = 1.a^n + na^{n-1}b + ... + nab^{n-1} + b^n$.

Exemple : Pour développer $(a+b)^5$, on construit le triangle de Pascal, jusqu'à la ligne $n=5$.

$$\begin{array}{llllll}
1 & & & & & \\
1 & 1 & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1
\end{array}$$

Les coefficients $\binom{5}{0}$, $\binom{5}{1}$, ... sont sur la dernière ligne. Donc :

$$(a+b)^5 = 1.a^5 + 5.a^4b + 10.a^3b^2 + 10.a^2b^3 + 5ab^4 + 1.b^5.$$

Dans cette somme, la somme des exposants de a et b dans chacun des termes est égale à n, les exposants de a sont rangés dans l'ordre décroissant, de n à 0, ceux de b sont rangés dans l'ordre croissant, de 0 à n.

■ Calculer une somme double

❑ Méthode 1.9.— Calculer une somme double
Pour bien comprendre quelle est la somme double à calculer, il peut être utile d'écrire les nombres à additionner dans un tableau. Ainsi, on visualise l'ensemble des couples (i,j) sur lesquels porte la somme. Pour le calcul, on se ramène en général, au calcul de deux sommes simples. Il est parfois nécessaire d'échanger l'ordre des sommes pour que le calcul aboutisse.

Exemples : • Soit $S = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i(j+1)$.

Notons dans un tableau les nombres à additionner pour obtenir S.

	1	2	...	j	...	...	n
1	2	3	...	$j+1$	...	...	$n+1$
2	4	6	...	$2(j+1)$	...	...	$2(n+1)$
.	.	.	...	...	...	...	.
.	.	.	...	...	...	...	.
i	$2i$	$3i$	...	$i(j+1)$	...	...	$i(n+1)$
.	.	.	...	...	...	...	.
n	$2n$	$3n$	...	$n(j+1)$	...	...	$n(n+1)$

S est la somme de tous les nombres du tableau précédent. L'ensemble des couples (i,j) sur lesquels porte la somme est $\{1,2,...,n\}^2$.

Pour $i \in \{1,2,...,n\}$, $l_i = \sum_{j=1}^{n} i(j+1)$ est la somme des nombres de la ligne i.