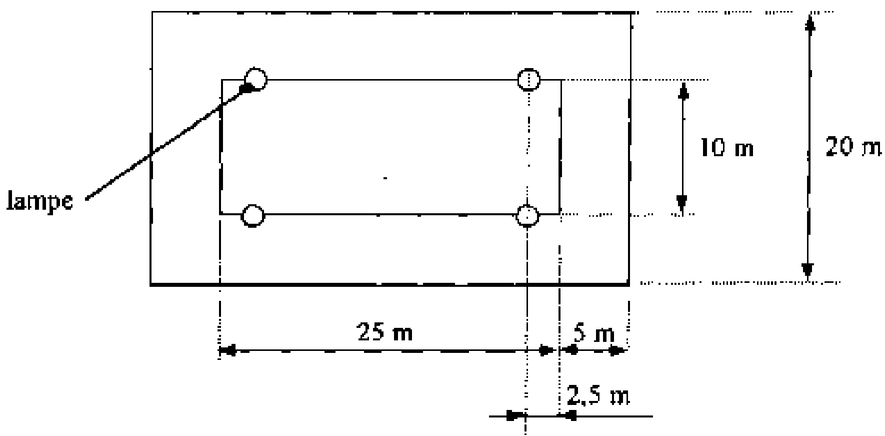
MECANIQUE DES FLUIDES

STATIQUE DES FLUIDES

EXERCICE 1 ....

CALCULS DE FORCES DE PRESSION SUR DES PAROIS PLANES

On désire construire une piscine couverte de L = 25 m de longueur, de l = 10 m de largeur et de h = 4,5 m de profondeur utile (hauteur d'eau). Le bâtiment qui l'abrite doit permettre d'avoir 5 m de plage sur tous les côtés de la piscine.



Données numériques :

Masse volumique de l'eau : $\rho_{eau} = 1\ 000\ \text{kg.m}^{-3}$

Intensité de la pesanteur : $g = 10\ \text{m.s}^{-2}$

Pression atmosphérique $p_0 = 10^5$ Pa.

1) Quelle est la résultante F des forces pressantes exercées sur le fond de la piscine et dues à l'action de l'eau lorsque la piscine est remplie ?

2) Calculer

2.1) La résultante des forces pressantes F_1 exercées sur chaque petite paroi verticale de cette piscine et dues à l'action de l'eau.

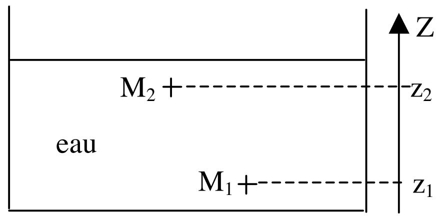
2.2) La résultante des forces pressantes F_2 exercées sur chaque grande paroi verticale de cette piscine et dues à l'action de l'eau.

2.3) La position du point d'application de chacune de ces résultantes par rapport au fond de la piscine et aux parois latérales.

D'après BTS Bâtiment 2003

CORRECTION

1) L'eau, supposée incompressible, contenue dans la piscine est au repos dans le seul champ de pesanteur et sa température est uniforme. On admet donc que la masse volumique ρ de l'eau est constante.



La relation de la statique des fluides, sous forme intégrale, s'écrit dans ces conditions (en appelant p_1 la pression au point M_1 et p_2 la pression au point M_2) :

$$p_1 - p_2 = \rho\ g\ (z_2 - z_1)$$

Au fond de la piscine, la pression p est telle que : $p - p_0 = \rho\ g\ h$. Cette pression p est uniforme, p ne dépendant que de la position z du point dans l'eau.

Dans ce cas, la résultante $\vec{F}$ des forces de pression **due à l'eau seule** qui s'exerce sur la surface S du fond de la piscine est orientée verticalement vers le bas et sa norme est :

$$F = (p - p_0)\ S$$

Soit :

$$\boxed{F = \rho\ g\ h\ S}$$

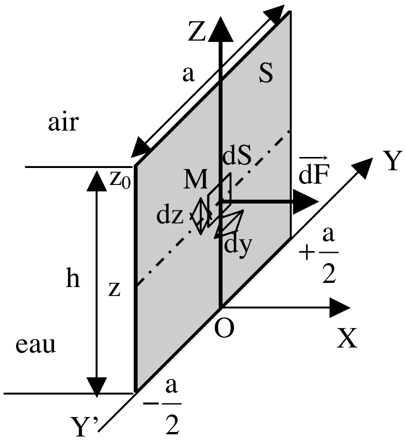
Remarque :
Cette force F correspond au poids P de l'eau qu'il y a au-dessus de la surface S. Effectivement, $P = m_{eau}g$ or $m_{eau} = \rho\ V_{eau}$. Puisque le volume d'eau V_{eau} contenue dans la piscine lorsqu'elle est remplie est : $V_{eau} = L \times l \times h$, le poids de l'eau est $P = \rho\ g \times L \times l \times h$. La surface S du fond de la piscine étant $S = L \times l$, on retrouve bien $P = \rho\ g\ h\ S = F$.
Application numérique : $F = 1\ 000 \times 10 \times 4{,}5 \times 25 \times 10$

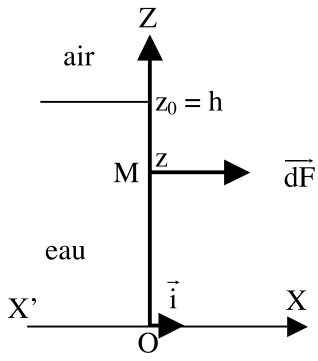
$$\mathbf{F = 1{,}1.10^7\ N}$$

2) Le calcul des forces de pression exercées sur chaque paroi verticale sera similaire d'une paroi à l'autre.
Soit une paroi verticale de dimensions a et b soumise à l'action exercée par de l'eau ; l'élément de surface dS, centré sur le point M de la paroi est soumis à la force $\overrightarrow{dF}$ (perpendiculaire à dS) exercée par l'eau tel que :

$$\overrightarrow{dF} = (p - p_0)\ dS\ \vec{i}$$

où p est la pression de l'eau à la côte z du point M et $dS = dy \times dz$.
Puisque $p - p_0 = \rho\ g\ z$, on peut écrire : $\overrightarrow{dF} = \rho\ g\ z\ dS\ \vec{i}$.





La projection sur l'axe X'X donne : $dF = \rho\ g\ z\ (dy \times dz)$ et la force F exercée par l'eau sur la paroi entière est obtenue par intégration de dF :

$$F = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_0^{z_0} \rho\ g\ z\ dy\ dz$$

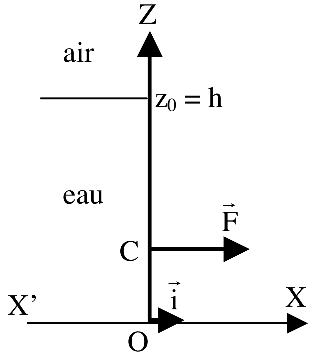
qui se réécrit :

$$F = \rho\ g\ \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dy \int_0^{z_0} z\ dz$$

Or : $\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dy = a$ et $\int_0^{z_0} z\ dz = \frac{z_0^2}{2} = \frac{h^2}{2}$ donc : $F = \frac{1}{2}\ \rho\ g\ a\ h^2$. Puisque la surface S de la paroi est $S = a \times h$, on obtient :

$$\boxed{F = \frac{1}{2}\ \rho\ g\ S\ h}$$

Le point d'application ou centre de poussée C de cette force F est tel que : $OC = \frac{h}{3}$. La situation est donc la suivante :



2.1) Sur chaque petite paroi verticale de dimension $S_1 = l \times h$, la résultante F_1 des forces de pression exercée par l'eau est :

$$\boxed{F_1 = \frac{1}{2}\,\rho\, g\, S_1\, h}$$

Application numérique : $F_1 = \frac{1}{2} \times 1\,000 \times 10 \times (10 \times 4{,}5) \times 4{,}5$

$$\mathbf{F_1 = 1{,}0.10^6\ N}$$

2.2) Sur chaque grande paroi verticale de dimension $S_2 = L \times h$, la résultante F_2 des forces de pression exercée par l'eau est :

$$\boxed{F_2 = \frac{1}{2}\,\rho\, g\, S_2\, h}$$

Application numérique :

$$F_2 = \frac{1}{2} \times 1\,000 \times 10 \times (25 \times 4{,}5) \times 4{,}5$$

$$\mathbf{F_2 = 2{,}5.10^6\ N}$$

2.3) Les points d'application C_1 et C_2 de chacune des résultantes des forces de pression $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$ sont tels que $OC_1 = \frac{h}{3}$ et $OC_2 = \frac{h}{3}$ en prenant l'origine O des côtes sur le fond de la piscine.

EXERCICE 2 ....

PRESSION STATIQUE ; FORCES DE PRESSION ; POUSSEE D'ARCHIMEDE

Dans un port, une grue vide la cargaison d'un bateau de pêche et laisse tomber à l'eau un conteneur frigorifique de forme parallélépipédique. Celui-ci se retrouve à un instant donné, immergé dans l'eau comme le montre la coupe du port sur la figure 1.

Les caractéristiques du conteneur sont les suivantes :

- Hauteur : H = 3,00 m ;
- Aire des faces supérieure et inférieure : S = 10,0 m^2 chacune ;
- Masse : M = 43 000 kg ;
- La surface supérieure se trouve, à cet instant, à une profondeur h sous la surface de l'eau et h = 5,00 m.

Caractéristiques générales :

- Masse volumique de l'eau du port : $\rho = 1\,030\ kg.m^{-3}$;
- Accélération de la pesanteur $g = 9{,}81\ m.s^{-2}$;
- Pression atmosphérique : $P_0 = 1{,}00.10^5$ Pa ;

1) Pressions statiques

1.1) Exprimer la pression p_1 s'exerçant sur la surface supérieure du conteneur en fonction de la pression atmosphérique P_0, de l'accélération de la pesanteur g, de la masse volumique ρ de l'eau du port et de la hauteur h.

Calculer P_1.

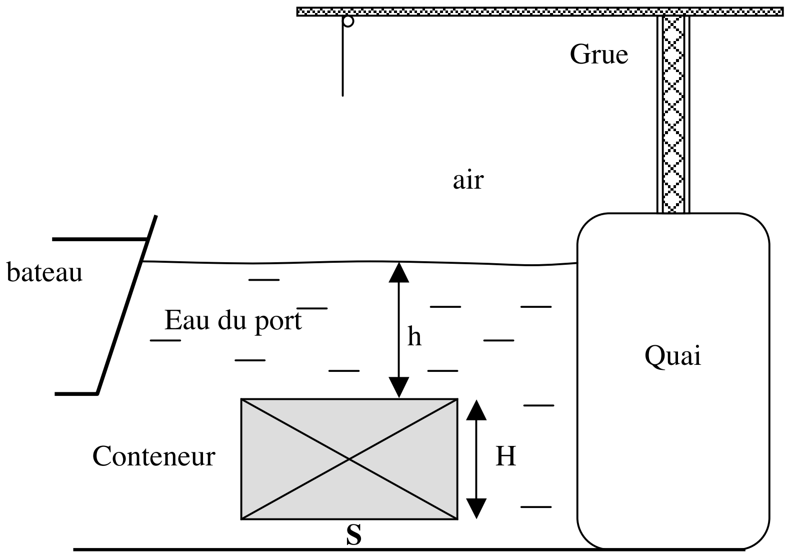
1.2) En déduire la norme de la force $\vec{F_1}$ s'exerçant sur cette surface.

1.3) Exprimer la pression P_2 s'exerçant sur la surface inférieure du conteneur en fonction de la pression atmosphérique P_0, de l'accélération de la pesanteur g, de la masse volumique ρ de l'eau du port et des hauteurs h et H.
Calculer P_2.

1.4) En déduire la norme de la force $\vec{F_2}$ s'exerçant sur cette surface.

1.5) Les forces s'exerçant sur les parois latérales se compensent : justifier cette affirmation. Calculer alors la résultante $\vec{F}$ des forces de pression s'exerçant sur le conteneur.

Figure 1



2) Poussée d'Archimède

2.1) Calculer le volume du conteneur.

2.2) Calculer les normes des forces suivantes :

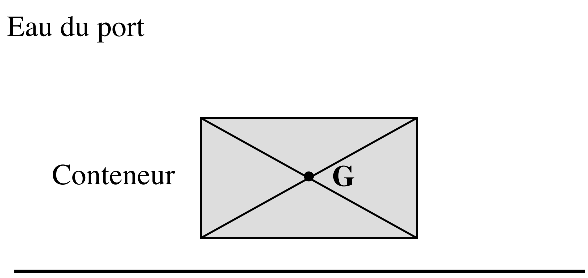
- Poids $\vec{P}$ du conteneur.
- Poussée d'Archimède $\vec{F_A}$ s'exerçant sur le conteneur.

2.3) Représenter ces vecteurs-force au point G sur le document-réponse (échelle : 1 cm ↔ 10^5 N).

2.4) Construire la résultante $\vec{F_R}$ des forces qui s'appliquent sur le conteneur.

2.5) Où, finalement, va se retrouver le conteneur : au fond de l'eau ou en surface ? Justifier.

DOCUMENT A RENDRE AVEC LA COPIE

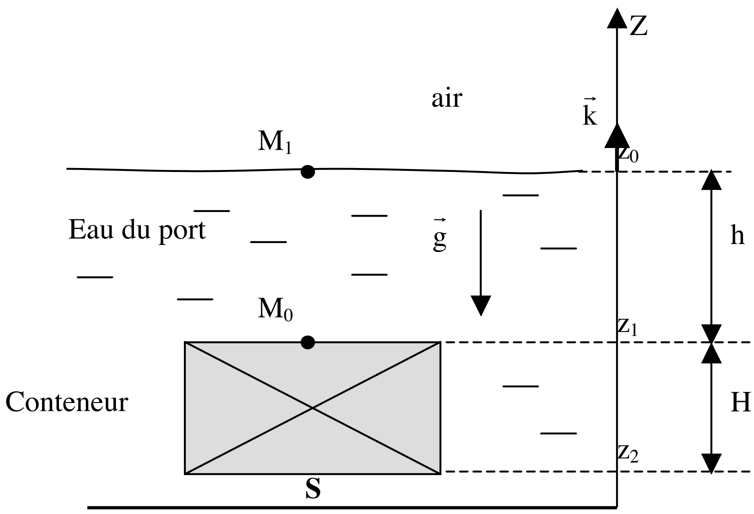


D'après BTS ROC 2005

CORRECTION

1) Pressions statiques

1.1) L'eau de mer est assimilée à un fluide homogène, incompressible et sa température est supposée être uniforme dans la zone où se trouve le conteneur. De ce fait, la masse volumique ρ de l'eau de mer est constante.
Seul le champ de pesanteur terrestre, supposé uniforme, s'exerce et l'accélération g de la pesanteur est supposée constante et l'eau est au repos.



La relation de la statique des fluides, sous forme différentielle, s'écrit :

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g$$

La pression à la côte z_1 sous le niveau de la mer est P_1 et la pression à la côte z_0 est égale par continuité à la pression atmosphérique P_0.
Par intégration, on obtient :

$$\int_{P_1}^{P_0} dP = -\rho\, g \int_{z_1}^{z_0} dz$$

Soit : $P_0 - P_1 = -\rho\, g\, (z_0 - z_1)$

On en déduit la pression P_1 dans l'eau de mer à la côte z_1 sous le niveau de la mer. En notant : $h = (z_0 - z_1)$, la relation précédente peut s'écrire :

$$P_1 - P_0 = \rho\, g\, h$$

Soit : $\boxed{P_1 = P_0 + \rho\, g\, h}$

Application numérique : $P_1 = 1{,}0.10^5 + (1\,030 \times 9{,}81 \times 5{,}0)$

$$\mathbf{P_1 = 1{,}5.10^5\ Pa}.$$

1.2) La pression P_1 étant uniforme à cette côte z_1, la face supérieure du conteneur, située également à la côte z_1, est soumise à une force $\vec{F_1}$ dont la norme est :

$$\boxed{F_1 = P_1 \times S}$$

Application numérique : $F_1 = 1{,}5.10^5 \times 10$

$$\mathbf{F_1 = 1{,}5.10^6\ N}.$$

1.3) Par un raisonnement analogue à celui de la question **1.1)**, on écrit :

$$\int_{P_2}^{P_0} dP = -\rho\, g \int_{z_2}^{z_0} dz$$

Soit : $P_0 - P_2 = -\rho\, g\, (z_0 - z_2)$

On en déduit la pression P_2 dans l'eau de mer à la côte z_2 sous le niveau de la mer. Puisque $h + H = (z_0 - z_2)$, la relation précédente peut s'écrire :

$$P_2 - P_0 = \rho\, g\, (h + H)$$

Soit : $\boxed{P_2 = P_0 + \rho\, g\, (h + H)}$

Application numérique : $P_2 = 1{,}0.10^5 + (1\,030 \times 9{,}81 \times 8{,}0)$

$$\mathbf{P_2 = 1{,}8.10^5\ Pa}.$$

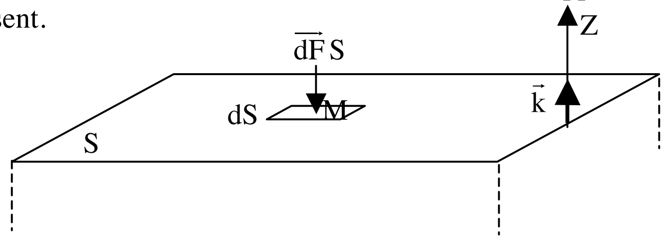
1.4) La pression P_2 est uniforme à la côte z_1 or, la face inférieure du conteneur, située également à la côte z_2, est soumise à une force $\vec{F_2}$ dont la norme est :

$$\boxed{F_2 = P_2 \times S}$$

Application numérique : $F_2 = 1{,}8.10^5 \times 10$

$$\mathbf{F_2 = 1{,}8.10^6\ N}.$$

1.5) La résultante des forces de pression qui s'exercent sur les deux faces verticales en vis-à-vis sont de même norme et de sens opposés donc elles se compensent.



Soit dS un élément de surface de la surface S supérieure du conteneur et M le point central de dS. La force $\overrightarrow{dF}$ qui s'exerce au point M est liée à la pression P de l'eau de mer au repos au point M par :

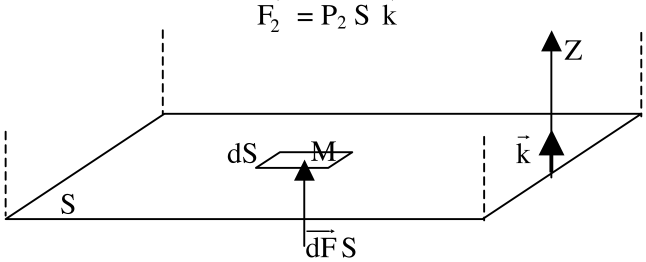
$$\overrightarrow{dF} = -\,P\,dS\,\vec{k}$$

Puisque P = P_1 uniforme lorsque z = z_1, la résultante des forces de pression $\overrightarrow{F_1}$ exercée par l'eau de mer sur la surface supérieure S du conteneur est :

$$\overrightarrow{F_1} = -\,P_1\,S\,\vec{k}$$

Par un raisonnement analogue, la résultante des forces de pression $\overrightarrow{F_2}$ exercée par l'eau de mer sur la surface inférieure S du conteneur est :

$$\overrightarrow{F_2} = P_2\,S\,\vec{k}$$



Puisque les forces de pression s'exerçant sur les parois latérales du conteneur se compensent, la résultante $\vec{F}$ des forces de pression exercées par l'eau sur le conteneur est :

$$\boxed{\vec{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}}$$

Sachant que la valeur de F_2 est supérieure à celle de F_1, $\vec{F}$ est orientée suivant le vecteur unitaire $\vec{k}$. La projection de cette égalité vectorielle sur l'axe vertical choisi donne :

$$F = F_2 - F_1$$

Application numérique : $F = 1{,}8.10^6 - 1{,}5.10^6$

$$\mathbf{F = 3{,}0.10^5\ N}.$$

Remarque : $\vec{F} = (P_2 - P_1)\,S\,\vec{k}$

D'après les expressions de P_1 et P_2, la résultante $\vec{F}$ des forces de pression s'écrit :

$$\vec{F} = [(P_0 + \rho\,g\,(h + H)) - (P_0 + \rho\,g\,h)]\,S\,\vec{k}$$

$$\vec{F} = \rho\,g\,H\,S\,\vec{k}$$

Le volume V du conteneur est égal à (SH) donc : $\vec{F} = \rho\,V\,g\,\vec{k}$. Cette force n'est rien d'autre que la poussée d'Archimède comme va le montrer la question suivante.

2) Poussée d'Archimède

2.1) Le volume du conteneur est celui d'un parallélépipède rectangle dont le volume V est $\boxed{V = S \times H}$.

Application numérique : $V = 10{,}0 \times 3{,}00$

$$\mathbf{V = 30{,}0\ m^3}$$