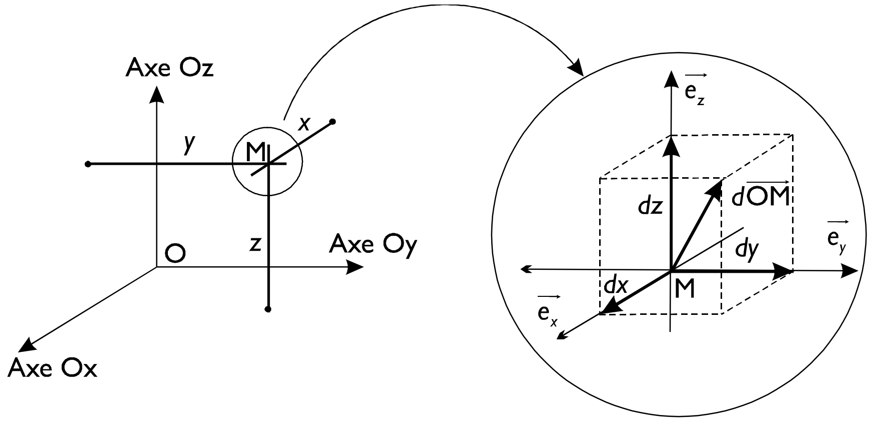
OUTILS MATHÉMATIQUES

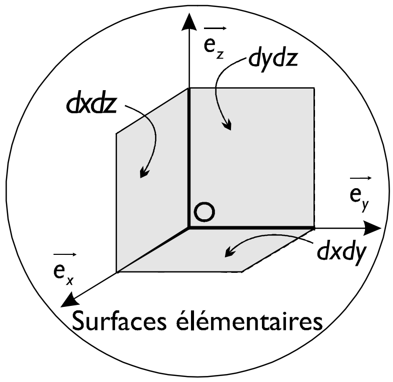
I. Éléments d'analyse vectorielle

I.1. Coordonnées cartésiennes

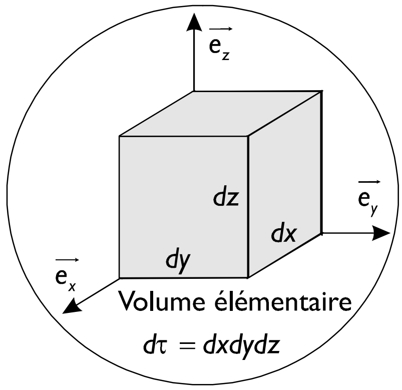


M est l'intersection de trois lignes de coordonnées : $\boxed{\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{e_x} + y\overrightarrow{e_y} + z\overrightarrow{e_z}}$.

Déplacements élémentaires sur le trièdre local : $\boxed{d\overrightarrow{OM} = dx\overrightarrow{e_x} + dy\overrightarrow{e_y} + dz\overrightarrow{e_z}}$.



Découpage des surfaces élémentaires.



Volume élémentaire.

I.2. Opérateurs différentiels et relations intégrales

Le **gradient** d'un champ scalaire $U(x, y, z)$ est donné par la relation suivante :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, U = \vec{\nabla}\, U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{e}_z$$

Avec $dU = \overrightarrow{\text{grad}}\, U \cdot \overrightarrow{dr}$.

L'opérateur **divergence** d'un champ vectoriel,

$\vec{V} = V_x(x, y, z)\overrightarrow{e_x} + V_y(x, y, z)\overrightarrow{e_y} + V_z(x, y, z)\overrightarrow{e_z}$ est donné par la relation suivante :

$$\text{div}\, \vec{V} = \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

L'opérateur **rotationnel** d'un champ vectoriel,
$\vec{V} = V_x(x,y,z)\overrightarrow{e_x} + V_y(x,y,z)\overrightarrow{e_y} + V_z(x,y,z)\overrightarrow{e_z}$ est donné par la relation suivante :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \left[\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right]\overrightarrow{e_x} + \left[\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\right]\overrightarrow{e_y} + \left[\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right]\overrightarrow{e_z}$$

Le **laplacien** d'un champ scalaire $U(x,y,z)$ est donné par la relation suivante :

$$\Delta U = \text{div}\left(\overrightarrow{\text{grad}}\,U\right) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

Par extension, le **laplacien** s'applique aussi à un **champ vectoriel** selon :

$$\vec{\Delta}\,\vec{V} = \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2}\overrightarrow{e_x} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2}\overrightarrow{e_y} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}\overrightarrow{e_z}$$

1.3. Propriétés et relations entre opérateurs

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V}\right) = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\text{div}\vec{V}\right) - \vec{\Delta}\,\vec{V}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{grad}}\,U\right) = \vec{0}$$

$$\text{div}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V}\right) = 0$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}(U_1 U_2) = U_2\overrightarrow{\text{grad}}(U_1) + U_1\overrightarrow{\text{grad}}(U_2)$$

$$\text{div}\left(U\vec{V}\right) = U\,\text{div}\,\vec{V} + \vec{V}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\,U$$

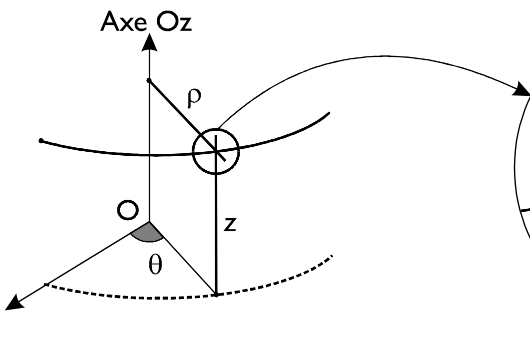
$$\text{div}\left(\vec{V_1} \wedge \vec{V_2}\right) = \vec{V_2}\cdot\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V_1} - \vec{V_1}\cdot\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V_2}$$

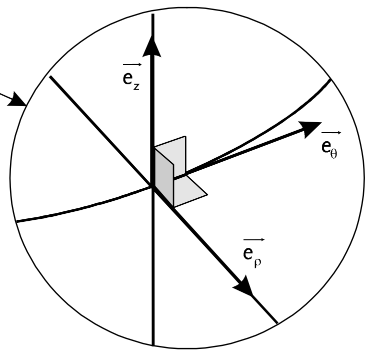
$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(U\vec{V}\right) = U\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V} + \overrightarrow{\text{grad}}\,U \wedge \vec{V}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\left(\vec{V_1}\cdot\vec{V_2}\right) = \vec{V_1} \wedge \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V_2} + \vec{V_2} \wedge \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V_1} + \left(\vec{V_2}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{V_1} + \left(\vec{V_1}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{V_2}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\vec{V_1} \wedge \vec{V_2}\right) = \vec{V_1}\left(\text{div}\,\vec{V_2}\right) - \vec{V_2}\left(\text{div}\,\vec{V_1}\right) - \left(\vec{V_1}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{V_2} + \left(\vec{V_2}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{V_1}$$

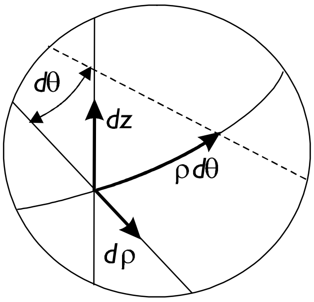
1.4. Coordonnées cylindriques



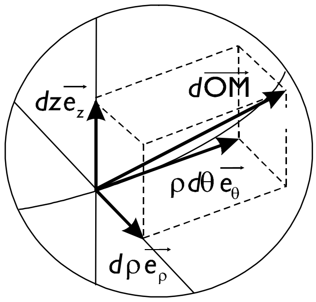


M est l'intersection de 3 lignes de coordonnées. $\boxed{\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{e_\rho} + z\overrightarrow{e_z}}$.

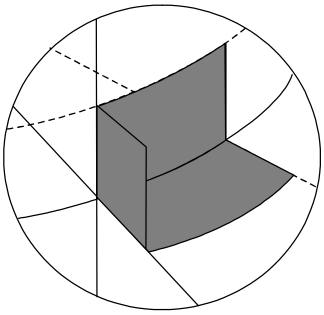
Définition du trièdre orthonormé local.



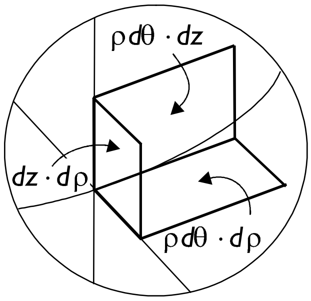
Déplacements élémentaires sur les lignes de coordonnées.



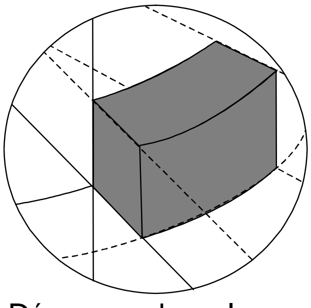
Déplacements élémentaires sur le trièdre local : $\boxed{d\overrightarrow{OM} = d\rho\overrightarrow{e_\rho} + \rho d\theta\overrightarrow{e_\theta} + dz\overrightarrow{e_z}}$.



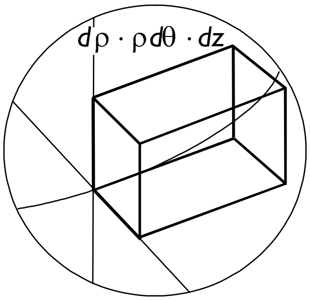
Découpage des surfaces élémentaires.



Valeur approchée des aires des surfaces élémentaires.



Découpage des volumes.



Valeur approchée du volume élémentaire.

1.5. Expression des opérateurs différentiels en coordonnées cylindriques

Le **gradient** d'un champ scalaire $U(\rho, \theta, z)$ est donné par la relation suivante :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, U = \frac{\partial U}{\partial \rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{e}_z$$

L'opérateur **divergence** d'un champ vectoriel,

$V_\rho(\rho, \theta, z)\overrightarrow{e_\rho} + V_\theta(\rho, \theta, z)\overrightarrow{e_\theta} + V_z(\rho, \theta, z)\overrightarrow{e_z}$ est donné par la relation suivante :

$$\text{div}\,\vec{V} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(\rho V_\rho\right)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

L'opérateur **rotationnel** d'un champ vectoriel,

$V_\rho(\rho, \theta, z)\overrightarrow{e_\rho} + V_\theta(\rho, \theta, z)\overrightarrow{e_\theta} + V_z(\rho, \theta, z)\overrightarrow{e_z}$ est donné par la relation suivante :

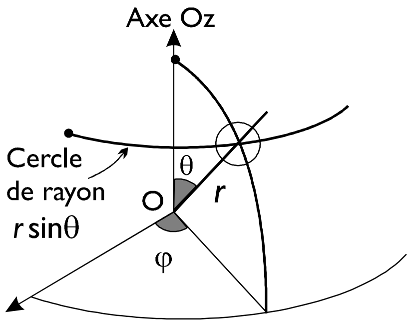
$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V} = \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z}\right]\vec{e}_\rho + \left[\frac{\partial V_\rho}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial \rho}\right]\vec{e}_\theta + \ldots$$

$$\ldots + \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho V_\theta)}{\partial \rho} - \frac{\partial V_\rho}{\partial \theta}\right]\vec{e}_z$$

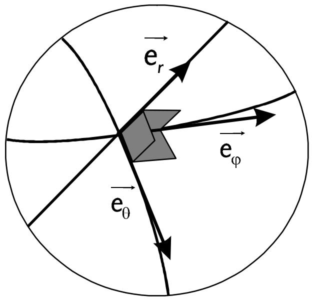
L'opérateur **laplacien** d'un champ scalaire $U(\rho, \theta, z)$ est donné par la relation suivante :

$$\Delta\, U = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial U}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

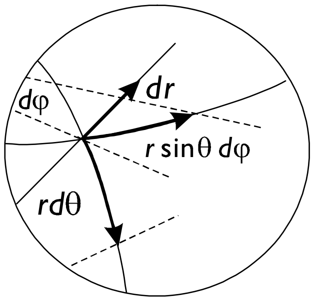
1.6. Coordonnées sphériques



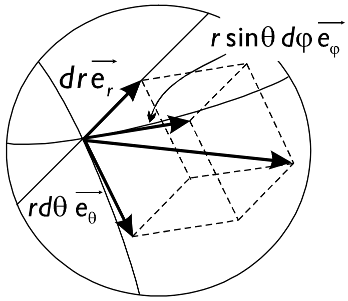
M est l'intersection de trois lignes de coordonnées : $\boxed{\overrightarrow{\text{OM}} = r\overrightarrow{e_r}}$.



Définition du trièdre orthonormé local.

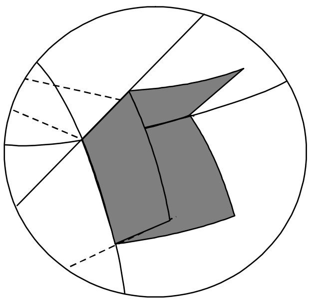


Déplacements élémentaires sur les lignes de coordonnées.

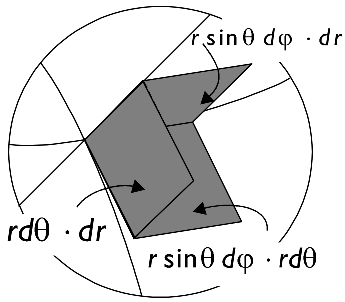


Déplacements élémentaires sur le trièdre local :

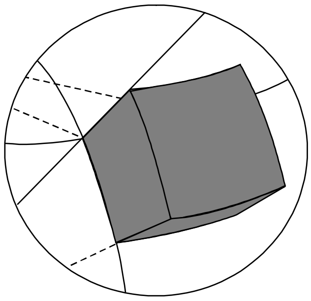
$\boxed{d\overrightarrow{\text{OM}} = dr\overrightarrow{e_r} + rd\theta\overrightarrow{e_\theta} + r\sin\theta d\varphi\overrightarrow{e_\varphi}}$.



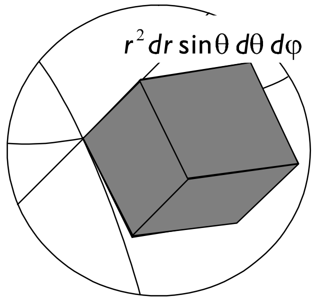
Découpage des surfaces.



Valeur approchée des aires des surfaces élémentaires.



Découpage des volumes.



Valeur approchée du volume élémentaire.

1.7. Expression des opérateurs différentiels en coordonnées sphériques

Le **gradient** d'un champ scalaire $U(r,\theta,\varphi)$ est donné par la relation suivante :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, U = \frac{\partial U}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi$$

L'opérateur **divergence** d'un champ vectoriel,

$V_\rho(r,\theta,\varphi)\overrightarrow{e_r} + V_\theta(r,\theta,\varphi)\overrightarrow{e_\theta} + V_\varphi(r,\theta,\varphi)\overrightarrow{e_\varphi}$ est donné par la relation suivante :

$$\text{div}\,\vec{V} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(rV_r\right)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\left\{\frac{\partial\left(\sin\theta V_\theta\right)}{\partial\theta} + \frac{\partial V_\varphi}{\partial\varphi}\right\}$$

L'opérateur **rotationnel** d'un champ vectoriel,

$V_\rho(r,\theta,\varphi)\overrightarrow{e_r} + V_\theta(r,\theta,\varphi)\overrightarrow{e_\theta} + V_\varphi(r,\theta,\varphi)\overrightarrow{e_\varphi}$ est donné par la relation suivante :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial\left(\sin\theta V_\varphi\right)}{\partial\theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial\varphi}\right]\vec{e}_r + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial V_r}{\sin\theta\,\partial\varphi} - \frac{\partial\left(rV_\varphi\right)}{\partial r}\right]\vec{e}_\theta + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial\left(rV_\theta\right)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial\theta}\right]\vec{e}_\varphi$$

L'opérateur **laplacien** d'un champ scalaire $U(r,\theta,\varphi)$ est donné par la relation suivante :

$$\Delta\, U = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial U}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}$$

2. Relations intégrales

2.1. Définitions

Circulation $\mathcal{C}$ d'un champ de vecteurs le long d'un contour orienté $\mathcal{C}$:

$$C = \int_{\mathcal{C}} \vec{A}\cdot\overrightarrow{d\ell}$$

Flux Φ d'un champ de vecteurs à travers une surface orientée $\vec{S} = S\,\vec{n}$:

$$\Phi = \iint_S \vec{A}\cdot\overrightarrow{dS}$$

2.2. Relations entre formulations intégrales

Relation de Stokes :

$$\iint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} \cdot \overrightarrow{dS} = \oint_{\mathcal{C}} \vec{A} \cdot \overrightarrow{d\ell}$$

Le contour orienté $\mathcal{C}$ s'appuie sur la surface orientée $\mathcal{S}$.

Relation d'Ostrogradski :

Le flux d'un champ vectoriel à travers une surface fermée (qui délimite un volume Vol.) s'exprime en fonction de l'intégrale (sur ce volume) de la divergence de ce champ par la **relation d'Ostrogradski** selon :

$$\oiint_S \vec{V} \cdot \overrightarrow{dS} = \iiint_{\text{Vol.}} \mathrm{div}\vec{V}\, d\tau$$

3. Notions d'analyse de Fourier

3.1. Généralités

Le nombre complexe j est tel que $j^2 = -1$.

Toute fonction $f(t)$ périodique de période T (satisfaisant aux conditions de Dirichlet) peut se décomposer sous la forme :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t$$

avec,

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t)\, dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \cos(n\omega t)\, dt \quad n \in \mathbb{N}^*$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \sin(n\omega t)\, dt \quad n \in \mathbb{N}^*$$

La pulsation $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ représente la pulsation du mode fondamental, les multiples portent le nom d'harmoniques.

Une fonction paire ne présente pas de terme en sinus.

Une fonction impaire ne présente pas de terme en cosinus.

Dans le domaine symbolique la fonction $f(t)$ associée à $\underline{f}(t)$ se décompose sous la forme :

$$\underline{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \underline{c_n} e^{jn\omega t}$$

Les coefficients $\underline{c_n}$ sont donnés par :

$$\underline{c_n} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \underline{f}(t)\, e^{-jn\omega t}\, dt \quad n \in \mathbb{N}$$

Le tracé du module des coefficients $\left|\underline{c_n}\right| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ en fonction des pulsations $n\omega$ représente le spectre en fréquence de la fonction.

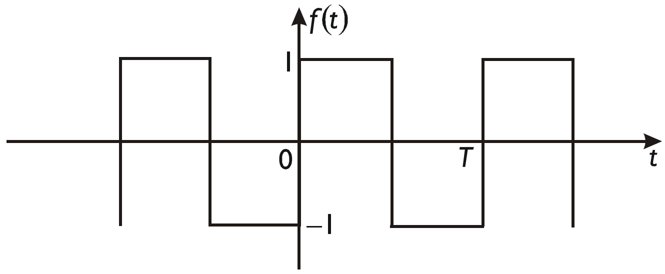
La valeur efficace d'un signal $f(t)$ est donné par :

$$\sqrt{\left\langle f^2(t) \right\rangle} = \sqrt{c_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{n=+\infty} c_n^2}$$

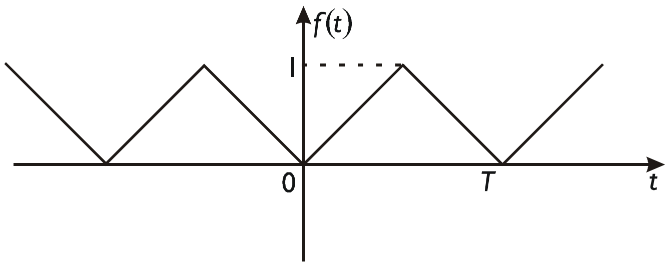
Cas d'une fonction sinusoïdale $f(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$:

$$\sqrt{\left\langle f^2(t) \right\rangle} = \frac{A}{\sqrt{2}}$$

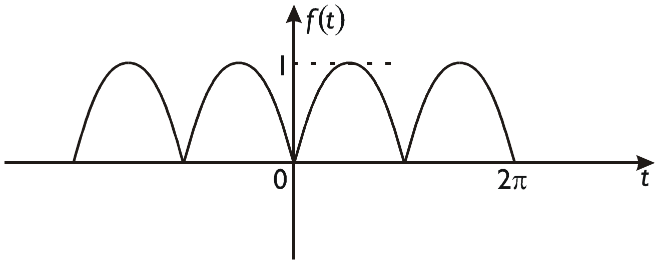
3.2. Décompositions en série de Fourier de fonctions usuelles



$$f(t) = \begin{cases} +1 \; pour & 0 < t < \dfrac{T}{2} \\ -1 \; pour & -\dfrac{T}{2} < t < 0 \end{cases} \qquad f(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{0}^{\infty} \frac{\sin(2p+1)\omega t}{2p+1}$$



$$f(t) = \begin{cases} +\dfrac{2}{T} t \; pour & 0 < t < \dfrac{T}{2} \\ -\dfrac{2}{T} t \; pour & -\dfrac{T}{2} < t < 0 \end{cases} \qquad f(t) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{0}^{\infty} \frac{\cos(2p+1)\omega t}{(2p+1)^2}$$



$$f(t) = |\sin t| \qquad f(t) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_0^\infty \frac{\cos 2pt}{(2p+1)(2p-1)\ldots}$$

4. Formules trigonométriques et hyperboliques

4.1. Définitions

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{jx} + e^{-jx}\right) \qquad \cosh x = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right)$$

$$\sin x = \frac{1}{2j}\left(e^{jx} - e^{-jx}\right) \qquad \sinh x = \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right)$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

4.2. Propriétés

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \qquad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \qquad \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$$

$$\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \mathrm{cotan}^2 x \qquad \frac{1}{\sinh^2 x} = \mathrm{cotanh}^2 x - 1$$

$$(\cos x + j\sin x)^n = \cos nx + j\sin nx \qquad (\cosh x + j\sinh x)^n = \cosh nx + \sinh nx$$

$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y \qquad \cosh(x+y) = \cosh x\cosh y + \sinh x\sinh y$$

$$\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y \qquad \cosh(x-y) = \cosh x\cosh y - \sinh x\sinh y$$

$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \sin y\cos x \qquad \sinh(x+y) = \sinh x\cosh y + \cosh x\sinh y$$

$$\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y \qquad \sinh(x-y) = \sinh x\cosh y - \cosh x\sinh y$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} \qquad \tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 - \tanh x\tanh y}$$

$$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x\tan y} \qquad \tanh(x-y) = \frac{\tanh x - \tanh y}{1 - \tanh x\tanh y}$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \qquad \cosh^2 x = \frac{1+\cosh 2x}{2}$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \qquad \sinh^2 x = \frac{\cosh 2x - 1}{2}$$

$$\tan^2 x = \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x} \qquad \tanh^2 x = \frac{\cosh 2x - 1}{1+\cosh 2x}$$

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} \qquad \cosh p + \cosh q = 2\cosh\frac{p+q}{2}\cosh\frac{p-q}{2}$$