1. Deux pendules d'aluminium

On fabrique un petit pendule en suspendant à un fil vertical très fin une petite boule constituée d'une feuille de papier d'aluminium froissée, de dimensions 2 cm sur 3 cm sur 40 µm. On dispose deux pendules identiques à une distance d = 20 cm l'un de l'autre.

1. Exprimer puis calculer la masse m d'un pendule.
2. On assimile chaque pendule à un objet ponctuel. Exprimer puis calculer la force F_1 de gravitation que chaque pendule exerce sur l'autre.
3. A quelle distance d' devraient se trouver les centres des pendules pour que la force de gravitation qu'ils exercent l'un sur l'autre soit égale à leur poids ? Commenter.
4. On électrise chaque pendule au moyen d'un bâton d'ébonite chargé ; si un électron par atome d'aluminium était arraché et transmis au bâton, quelle serait la charge électrique portée par chaque pendule ?
5. Quelle serait alors la force électrique F_2 exercée par un pendule sur l'autre ?
6. Quelle proportion d'atomes ayant perdu un électron faudrait-il pour que $F_1 = F_2$?

Données :
Un atome d'aluminium a 13 protons et 14 neutrons
Masse volumique de l'aluminium = $\rho = 2{,}7.10^{3}$ *kg/m*^{3}
Masse d'un nucléon = $m = 1{,}67.10^{-27}$ *kg*
Charge élémentaire = $e = 1{,}6.10^{-19}$ *C*
$G = 6{,}67.10^{-11}$ *SI ;* $g = 10$ *SI ;* $k = 9.10^{9}$ *SI*
Nombre d'Avogadro = $N = 6.10^{23}$ *SI.*

Correction

▸ **1.** Soit V le volume d'un pendule. On a
$m = \rho.V = 2,7.10^3 \times 2.10^{-2} \times 3.10^{-2} \times 40.10^{-6} = 6,48.10^{-5}$ kg.

▸ **2.** La force de gravitation est donnée par
$F_1 = \dfrac{G.m.m}{d^2}$; $F_1 = \dfrac{6,67.10^{-11} \times (6,48.10^{-5})^2}{(20.10^{-2})^2} = 7,0.10^{-18}$ N.

▸ **3.** Le poids de chaque pendule est $P = m.g$. Si les deux pendules étaient distants de d', la force de gravitation qu'ils exerceraient l'un sur l'autre serait $F_1 = \dfrac{G.m.m}{d'^2}$ et on aurait alors
$d' = \sqrt{\dfrac{G.m}{g}} = \sqrt{\dfrac{6,67.10^{-11} \times 6,48.10^{-5}}{10}} = 2,1.10^{-8}$ m.

On constate que cette distance est très petite, inférieure à la taille d'une boule.

▸ **4.** Soient M la masse molaire de l'aluminium, n le nombre de moles d'aluminium et n' le nombre d'atomes d'aluminium contenus dans une boule. L'aluminium ayant 13 protons et 14 neutrons, on considère que sa masse molaire est égale à 27 g /mol. On a
$n = \dfrac{m}{M}$; $n' = n.N = \dfrac{m.N}{M}$. La charge portée par une boule est alors $q = n'.e$.

On a ainsi $q = \dfrac{m.N.e}{M}$; $q = \dfrac{6,48.10^{-5} \times 1,6.10^{-19} \times 6.10^{23}}{27.10^{-3}} = 2,3.10^2$ C.

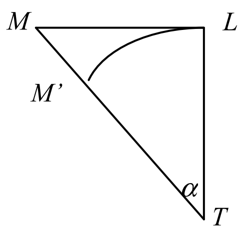
▸ **5.** La force électrique exercée par un pendule sur l'autre est
$F_2 = \dfrac{9.10^9 \times (2,3.10^2)^2}{(20.10^{-2})^2} = 1,2.10^{16}$ N . C'est énorme.

▸ **6.** Si on avait $F_1 = F_2$, alors la charge portée par une boule, q'' serait telle que
$F_1 = F_2 = \dfrac{G.m^2}{d^2} = \dfrac{k.q''}{d^2}$; $q'' = m.\sqrt{\dfrac{G}{k}} = 6,48.10^{-5}.\sqrt{\dfrac{6,67.10^{-11}}{9.10^9}} = 5,6.10^{-15}$ C

$\dfrac{q}{q''} = \dfrac{230}{5,6.10^{-15}} = 4.10^{16}$ .Il y aurait un atome sur 4.10^{16} qui aurait perdu un électron ; c'est infime.

2. La Lune tombe sur la Terre

Pour Newton, si la Lune tourne autour de la Terre, c'est parce qu'elle subit de la part de celle-ci une attraction (= son poids), alors qu'en son absence elle décrirait un mouvement rectiligne et uniforme. Il s'agit alors de calculer de combien la Lune « tombe » sous l'effet de son poids en appliquant les lois de Newton, et de vérifier que la valeur trouvée est en accord avec l'observation du mouvement de la Lune. En une seconde par exemple, la Lune décrirait le segment *LM* sans l'attraction de la Terre, et décrirait l'arc *LM'* avec celle-ci. On peut donc dire que la Lune « tombe » de la distance *MM'*.



1. Donner l'expression de la force F que la Terre exerce sur la Lune.
2. En déduire l'expression de l'intensité de la pesanteur g que la Terre exerce à l'endroit où se trouve la Lune. Calculer g.
3. La hauteur de chute lors d'un mouvement de chute libre s'exprime en fonction de l'intensité de la pesanteur et de la hauteur de chute par $h = g.t^2 / 2$. Calculer la hauteur h dont tombe la Lune à chaque seconde.
4. La Lune décrit une révolution autour de la Terre en 29,5 jours. En déduire l'angle α dont elle tourne par seconde.
5. Exprimer l'écart MM' par seconde entre trajectoire rectiligne et trajectoire circulaire de la Lune, en fonction de LT et de α.
6. Pour des angles petits, on peut appliquer la formule approchée $\cos\alpha = 1 - \alpha^2 / 2$ avec α en radians. Calculer MM'.
7. Comparer MM' et h et conclure.

Données :
$G = 6{,}67.10^{-11}$ SI ; M = masse de la Terre = 6.10^{24} kg
Distance Terre Lune = 4.10^5 km.

Correction

‣ **1.** On a $F = \dfrac{G.m.M}{TL^2}$, avec m = masse de la Lune.

‣ **2.** Le poids de la Lune est $P = m.g$, avec g intensité de la pesanteur là où est la Lune. Ce poids est dû à la gravitation universelle, et on a $P = F = m.g = \dfrac{G.m.M}{TL^2}$; $g = \dfrac{G.M}{TL^2} = \dfrac{6,67.10^{-11} \times 6.10^{24}}{(4.10^8)^2} = 2,5.10^{-3}$ SI.

‣ **3.** Pendant une seconde, la Lune tombe alors sur la Terre de la hauteur h telle que $h = \dfrac{1}{2} g.t^2 = \dfrac{1}{2} \times 2,5.10^{-3} \times 1^2 = 1,2.10^{-3}$ m.

‣ **4.** La Lune tourne de 360° = 2.π rad en 29,5 jours ; en une seconde elle tourne de l'angle $\alpha = \dfrac{2.\pi}{29,5 \times 24 \times 3600} = 2,465.10^{-6}$ rad.

‣ **5.** On a
$\cos\alpha = \dfrac{LT}{MT}$; $MM' = MT - LT$; $MM' = MT(1 - \cos\alpha)$.

‣ **6.** L'angle α étant petit, on a $\cos\alpha = 1 - \dfrac{\alpha^2}{2}$ et il vient

$$MM' = MT(1 - 1 + \frac{\alpha^2}{2}) = \frac{MT.\alpha^2}{2}$$

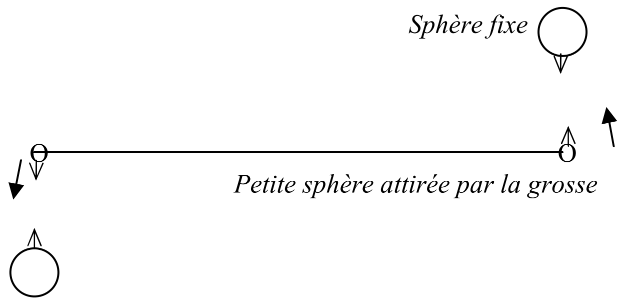
$$MM' = \frac{4.10^8 \times (2,465.10^{-6})^2}{2} = 1,2.10^{-3} \text{ m.}$$

‣ **7.** On constate que $MM' = h$. La théorie de Newton de la gravitation universelle est confirmée dans ce cas particulier.

Revoir les unités d'angles.

3. Cavendish et la densité de la Terre

Cavendish étudia expérimentalement (1798) la densité de la Terre. Son expérience consista à placer deux petites sphères identiques en plomb aux extrémités d'un fléau horizontal suspendu par un filin en son centre, pour constituer un pendule de torsion. On approchait deux grosses sphères en plomb dans le même plan horizontal ; la tige donc le filin, tournait d'un angle α et la mesure de cet angle permettait de déterminer la force F exercée sur une petite sphère par la grosse sphère en regard.



Chaque petite sphère avait pour rayon r = 1 pouce ; chaque grande sphère r' = 6 pouces. La distance entre les centres d'une petite sphère et de la grosse en regard était d = 9 pouces ; celle entre les centres des deux petites sphères D = 40 pouces. La mesure de α donna $F = 1,66.10^{-7}$ N.

1. Comparer la force exercée sur une petite sphère par la grosse sphère voisine (F) à la force exercée par l'autre grosse sphère (F').
2. Calculer les masses m de la petite sphère et m' de la grosse.
3. Exprimer littéralement la constante G de la gravitation universelle puis calculer sa valeur déduite de cette expérience.
4. En déduire la masse M de la Terre et sa densité d (par rapport à l'eau).

Données :
Masse volumique du plomb = ρ = 11,3.10 ^{3} SI ; g = 9,81 SI
1 Pouce = 2,54 cm ; longueur du méridien terrestre C = 40 000 km très précisément.

Correction

▸ **1.** On peut considérer que les forces exercées par les deux grosses sphères sur la petite sont les mêmes que si chaque sphère était ramenée à son centre. On appelle A le centre de la petite sphère et B et C celui des grosses sphères ; m la masse de la petite sphère et m' celle d'une grosse sphère. La loi de la gravitation universelle permet d'écrire $F = \dfrac{G.m.m'}{AB^2}$; $F' = \dfrac{G.m.m'}{AC^2}$; $\dfrac{F}{F'} = \dfrac{AC^2}{AB^2}$, avec $AB =$ 9 pouces (distance entre les centres de la petite sphère et de la grosse sphère voisine) et $AC = \sqrt{40^2 + 9^2}$ (distance entre les centres de la petite sphère et de l'autre grosse sphère). On a donc $\dfrac{F}{F'} = \dfrac{40^2 + 9^2}{9^2} = 21$. L'influence de la sphère la plus proche prédomine nettement.

▸ **2.** Soit V le volume de la petite sphère ; on a

$$V = \frac{4}{3}\pi.r^3 \ ; \ m = \rho.V = \frac{4}{3}\pi.r^3.\rho = \frac{4.\pi.(2,54.10^{-2})^3 \times 11,3.10^3}{3} = 0,776\,\text{kg}.$$

Comme $r' = 6r$, on a $\dfrac{m'}{m} = \dfrac{r'^3}{r^3} = 6^3 = 216$; $m' = 216 \times 0,776 = 168$ kg.

▸ **3.** On a

$$F = \frac{G.m.m'}{AB^2} \ ; \ G = \frac{F.AB^2}{m.m'} = \frac{1,66.10^{-7} \times (9 \times 2,54.10^{-2})^2}{0,776 \times 168} = 6,65.10^{-11}\ \text{SI}.$$

▸ **4.** La Terre (de centre O, de masse volumique ρ'et de volume V') exerce sur la masse m une force f égale au poids de m. On a $f = m.g = \dfrac{G.m.M}{OA^2}$; $M = \dfrac{g.OA^2}{G}$; $C = 2\pi.OA$ donc $M = \dfrac{g.C^2}{4.\pi^2.G}$;

$$M = \frac{9,81 \times (4.10^7)^2}{4.\pi^2 \times 6,65.10^{-11}} = 6,0.10^{24}\ \text{kg}.$$

$$\rho' = \frac{M}{V'} \ ; \ V' = \frac{4}{3}.\pi.OA^3 = \frac{4.\pi.C^3}{3 \times (2.\pi)^3} \ ; \ \rho' = \frac{6.\pi^2.M}{C^3} \ ;$$

$\rho' = \dfrac{6.\pi^2 \times 6.10^{24}}{(4.10^7)^3} = 5,55.10^3$ kg/m^3. La densité moyenne de la Terre est donc égale à 5,55.

4. Millikan et la charge élémentaire

L'expérience de Millikan (1910) consista à étudier le mouvement d'une petite goutte d'huile chargée, plongée dans un champ électrique ; elle subissait alors son poids, une force électrique de même sens que le poids, et une force de frottement. Un régime stationnaire était rapidement atteint, la goutte avait alors un mouvement rectiligne et uniforme.
La force électrique F s'exprime en fonction du champ E et de la charge de la goutte q par $F = q.E$.
La force de frottement f s'exprime en fonction du rayon r et de la vitesse v de la goutte par $f = 6.\pi.\eta.r.v$ où η est une constante (la viscosité de l'huile).

1. En l'absence de champ électrique la vitesse de la goutte était égale à v = 0,40 mm/s. En utilisant le principe de l'inertie, exprimer puis calculer le rayon de la goutte.
2. En présence de ce champ, la vitesse de la goutte était égale à v' = 1,40 mm/s. Exprimer puis calculer la charge électrique portée par la goutte.
3. Calculer le rapport q/e, où e est la charge élémentaire. Conclure.

Données :
$E = 4{,}0.10^{5}$ SI ; $\rho = 900$ SI ; $\eta = 1{,}8.10^{-5}$ SI; $g = 9{,}8$ SI ; $e = 1{,}6.10^{-19}$ C.

Correction

▸ **1.** D'après le principe de l'inertie, la goutte en mouvement rectiligne et uniforme est soumise à un ensemble de forces dont la somme vectorielle est nulle. Elle subit son poids *P* et la force de frottement *f.*
Soient ρ, *m* et *V* la masse volumique, la masse et le volume de la goutte.
On a $P = m.g = \rho.V.g = 4.\pi.r^3.\ \rho.\ g / 3$; $f = 6.\pi.\eta.r.v$; et $f = P$. Il vient

$$r = \sqrt{\frac{9.\eta.v}{\rho.g}} = \sqrt{\frac{9\times 1,8.10^{-5}\times 0,4.10^{-3}}{2\times 900\times 9,8}} = 1,92.10^{-6}\ \text{m}\ .$$

▸ **2.** En présence du champ électrique la goutte subit les trois forces, *P, F, f'* (nouvelle valeur de la force de frottement), toutes trois verticales et dont la somme vectorielle est nulle ; on a donc $P + F = f'$; $F = f' - P$; comme $P = f$, il vient $F = f' - f = 6.\pi.\eta.r.v' - 6.\pi.\eta.r.v$ et de plus, $F = q.E$.

On a donc $q = \dfrac{6.\pi.\eta.r(v' - v)}{E}$

$$q = \frac{6.\pi\times 1,8.10^{-5}\times 1,92.10^{-6}\times(1,4-0,4).10^{-3}}{4,0.10^{5}} = 1,63.10^{-18}\ \text{C}\ .$$

▸ **3.** On a $\dfrac{q}{e} = \dfrac{1,63.10^{-18}}{1,6.10^{-19}} = 10$.

La charge de la petite goutte est un multiple entier d'une charge, dite charge élémentaire, et qui vaut $1,6.10^{-19}$ C. En recommençant l'expérience avec d'autres valeurs du champ, on arrive toujours à cette même conclusion.

Revoir le système SI, ses grandeurs fondamentales, ses unités et les différentes conversions.