Chapitre 1. Cours

Objectifs pédagogiques

- Ecrire le principe fondamental de la dynamique
- Introduire la notion de torseur des actions extérieures
- Enoncer les théorèmes généraux
- Enoncer le théorème de l'énergie cinétique

Notions abordées

- Torseur d'actions extérieures
- Principe fondamental de la dynamique
- Théorèmes généraux
- Théorème de la résultante dynamique
- Théorème du moment dynamique
- Equations du mouvement
- Intégrale première du mouvement
- Théorème de l'action et de la réaction
- Théorème de l'énergie cinétique
- Intégrale première de l'énergie cinétique
- Dynamique des solides en contact
- Lois de Coulomb
- Contact avec glissement
- Contact sans glissement

Le principe fondamental de la dynamique a été énoncé pour la première fois vers la fin du XVII^e siècle par Newton. Il énonce une relation entre les causes (les actions mécaniques) et les effets (le mouvement caractérisé par l'accélération et non la vitesse).
Dans ce qui suit nous allons présenter le principe fondamental de la dynamique dans sa forme classique puis les théorèmes qui en découlent à savoir les théorèmes généraux puis le théorème de l'action et de la réaction et enfin le théorème de l'énergie cinétique.

Un peu d'Histoire
Au XVII^e siècle, Galilée a énoncé un principe dont la modernité est remarquable : « tout corps possède une certaine inertie qui l'oblige à conserver sa vitesse, à moins qu'une force extérieure ne l'oblige à arrêter ce mouvement ».
Moins d'un siècle après Galilée, Isaac Newton a formulé trois lois fondamentales :

1ère loi : « tout objet en état de mouvement rectiligne uniforme et qui n'est soumis à aucune force extérieure, conserve son mouvement dans un repère galiléen ».
2ème loi : « force = masse $\times$ accélération ».
3ème loi : « tout corps soumis à une force exerce en retour une force de même intensité et de sens opposé ».

Le principe fondamental de la dynamique est la traduction, avec les outils mathématiques actuels, des lois de Newton.
Le principe fondamental de la dynamique ne peut s'exprimer que dans certains référentiels appelés référentiels galiléens.

1. Référentiels galiléens

A partir du principe de l'action et de la réaction et du principe fondamental de la dynamique, nous pouvons établir les théorèmes généraux de la dynamique dans un référentiel galiléen ou non galiléen.
En effet, un référentiel est dit galiléen (ou absolu) si les lois de Newton exprimées dans celui-ci sont valables. Tout repère en mouvement de translation uniforme par rapport à un repère galiléen est lui aussi galiléen, car les accélérations constatées à partir d'un même point seront les mêmes dans les deux repères.

2. Torseur des actions extérieures

On appelle torseur des actions mécaniques extérieures le torseur des actions exercées sur un système matériel (Σ) par l'univers matériel privé de (Σ), (c'est-à-dire par le complémentaire $(\overline{\Sigma})$ de (Σ) par rapport à l'univers matériel). Ces actions sont représentées par le torseur noté $[F_{ext}]$ ou $[F_{\overline{\Sigma}\to\Sigma}]$ appelé torseur des actions extérieures à (Σ) :

$$[F_{ext}] = _P\begin{cases} \vec{R}_{ext} \\ \vec{M}_{ext}(P) \end{cases} \quad \text{ou bien} \quad [F_{\overline{\Sigma}\to\Sigma}] = _P\begin{cases} \vec{R}_{\overline{\Sigma}\to\Sigma} \\ \vec{M}_{\overline{\Sigma}\to\Sigma}(P) \end{cases} \quad \forall P$$

si les composantes de $\vec{R}_{ext}$ et de $\vec{M}_{ext}(P)$ sont respectivement (*X, Y, Z*) et (*L, M, N*) dans une base orthonormée directe $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, on peut écrire aussi :

$$[F_{ext}] = {}_P\begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

on distinguera :

– les forces localisées auxquelles on associe un vecteur lié $(P, \vec{F})$ qui s'exerce sur un point matériel isolé *P* ou sur un point matériel *P* d'un système continu (force concentrée). Le torseur d'action s'écrit alors :

$$[F_{ext}] = {}_P\begin{Bmatrix} \vec{F} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

– les couples efforts concentrés nécessaires pour schématiser certaines actions décrites géométriquement comme ponctuelles. On a dans ce cas :

$$[F_{ext}] = {}_P\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{\Gamma} \end{Bmatrix}$$

la résultante étant nulle, l'expression du torseur en un point différent de P reste inchangée.

– les forces réparties à densité (cas des actions à distance de type gravitationnel) ; pour un système continu, on définit une densité vectorielle de force $\vec{f}(P)$ et, à chaque élément matériel dm entourant le point *P*, on associe le vecteur lié élémentaire $(\mathrm{P}, \vec{\mathrm{f}}(\mathrm{P})\mathrm{dm})$. Le torseur s'écrit :

$$[F_{ext}] = {}_P\begin{Bmatrix} \displaystyle\int_{(\Sigma)} \vec{f}(P)dm \\ \displaystyle\int_{(\Sigma)} \overrightarrow{OP} \wedge \vec{f}(P)dm \end{Bmatrix}$$

les efforts extérieurs à un système matériel (Σ) sont les efforts exercés sur (Σ) par l'univers matériel privé de (Σ). Si (Σ) est soumis à des forces localisées $(P_i, \vec{F}_i)$, des couples $\vec{\Gamma}_i$ et des efforts à distance de densité massique $\vec{f}$, le torseur des efforts extérieurs à (Σ) s'écrira :

$$[F_{ext}] = {}_P\begin{Bmatrix} \vec{F}_e \\ \vec{M}_P(F_e) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \displaystyle\sum_i \vec{F}_i + \int_{(\Sigma)} \vec{f}dm \\ \displaystyle\sum_i \overrightarrow{OP_i} \wedge \vec{F}_i + \sum_i \vec{\Gamma}_i + \int_{(\Sigma)} \overrightarrow{OP} \wedge \vec{f}dm \end{Bmatrix}$$

3. Principe fondamental de la dynamique

3.1. Enoncé du principe

« Il existe au moins un référentiel (R_g), dit repère **galiléen**, tel que pour tout système matériel (Σ), en mouvement par rapport à (R_g), le torseur dynamique de (Σ) est égal au torseur des actions mécaniques extérieures à (Σ) ».

$$\boxed{\left[D(\Sigma / R_g)\right] = \left[F_{ext}\right]}$$

3.2. Théorèmes généraux de la dynamique

En écrivant qu'en tout point de l'espace, les deux torseurs intervenant dans le P.F.D. ont les mêmes éléments de réduction, on obtient deux équations vectorielles appelées théorèmes généraux de la dynamique.

Soit un système matériel (Σ) en mouvement par rapport à (R_g), de masse m de centre d'inertie *G*, posons en un point *P* quelconque :

$$\left[D(\Sigma / R_g)\right] = {}_P\begin{cases} m\vec{\Gamma}(G / R_g) \\ \vec{\delta}_P(\Sigma / R_g) \end{cases} \quad \text{et} \quad \left[F_{ext}\right] = {}_P\begin{cases} \vec{R}_{ext} \\ \vec{M}_{ext}(P) \end{cases}$$

d'après le principe fondamental de la dynamique, on a :

$${}_P\begin{cases} m\vec{\Gamma}(G / R_g) \\ \vec{\delta}_P(\Sigma / R_g) \end{cases} = {}_P\begin{cases} \vec{R}_{ext} \\ \vec{M}_{ext}(P) \end{cases}$$

cette égalité se traduit par les deux équations vectorielles suivantes qui traduisent à leur tour **les théorèmes généraux de la dynamique :**

$$\boxed{\begin{cases} m\vec{\Gamma}(G / R_g) = \vec{R}_{ext} \\ \vec{\delta}_P(\Sigma / R_g) = \vec{M}_{ext}(P) \end{cases}}$$

3.3. Théorème de la résultante dynamique

Pour tout système matériel (Σ) en mouvement par rapport à (R_g), la résultante dynamique de (Σ) en mouvement par rapport à (R_g) est égale à la résultante du torseur des actions mécaniques extérieures à (Σ), soit :

$$\boxed{m\vec{\Gamma}(G / R_g) = \vec{R}_{ext}}$$

3.4. Théorème du moment dynamique

Pour tout système matériel (Σ) en mouvement par rapport à (R_g), le moment dynamique de (Σ) en mouvement par rapport à (R_g) est égal en tout point *P*, au moment du torseur des actions mécaniques extérieures à (Σ), soit :

$$\vec{\delta}_P(\Sigma / R_g) = \vec{M}_{ext}(P)$$

ce dernier théorème est aussi appelé théorème du moment cinétique. En effet, en exprimant le moment dynamique en fonction du moment cinétique, il vient :

$$\left[\frac{d\vec{\sigma}_P(\Sigma / R_g)}{dt}\right]_{R_g} + m\vec{V}(P / R_g) \wedge \vec{V}(G / R_g) = \vec{M}_{ext}(P)$$

cette relation, suivant que le point *P* est fixe ou confondu avec le centre d'inertie *G* du système, conduit respectivement aux théorèmes du moment cinétique en un point fixe et au théorème du moment cinétique au centre d'inertie.

3.5. Equations du mouvement - Intégrale première du mouvement

Pour écrire les équations du mouvement résultant du **PFD**, il faut bien préciser le système (Σ) auquel est appliqué le principe. Il faut alors faire un bilan précis des actions mécaniques exercées par le milieu extérieur sur le système considéré, calculer leurs torseurs respectifs et bien choisir le point *P* pour la simplicité des calculs, bien que pour l'application du **PFD** ce point est arbitraire. Lorsque le système (Σ) est constitué de plusieurs solides (S_i), on obtiendra le maximum d'équations en appliquant le **PFD** à chacun des solides (S_i).

Supposons que la position du système matériel (Σ) dans le repère (Rg) soit définie en fonction de *n* paramètres appelés $q_i(t)$; ($i = 1$ *à* n). L'application du **PFD** au système matériel (Σ) conduit à écrire deux équations vectorielles dont les projections sur une base orthonormée directe donnent au maximum six équations scalaires indépendantes (équations différentielles du second ordre non linéaires).

Dans ces équations peuvent figurer :

1. des données géométriques et des caractéristiques d'inertie du système matériel.
2. des composantes d'actions mécaniques connues ou inconnues.

Une équation du mouvement est une équation différentielle du second ordre du type :

$$f[q_i(t), \dot{q}_i(t), \ddot{q}_i(t), t] = 0$$

déduite du **PFD** dans laquelle ne figure aucune composante inconnue d'action mécanique.

Une intégrale première du mouvement est une équation différentielle du premier ordre du type :

$$f[q_i(t), \dot{q}_i(t), , t] = Cte$$

obtenue par intégration d'une équation du mouvement.

4. Théorème de l'action et de la réaction

Enoncé

Soient (Σ_1) et (Σ_2) deux systèmes mécaniques sans partie commune, alors le torseur $\lfloor F_{\Sigma_1\to\Sigma_2}\rfloor$ des actions exercées par (Σ_1) sur (Σ_2) est égal à l'opposé du torseur $\lfloor F_{\Sigma_2\to\Sigma_1}\rfloor$ des actions exercées par (Σ_2) sur (Σ_1) :

$$\lfloor F_{\Sigma_1\to\Sigma_2}\rfloor = -\lfloor F_{\Sigma_2\to\Sigma_1}\rfloor$$

Démonstration

Par application du **PFD** au système $(\Sigma) = (\Sigma_1) \cup (\Sigma_2)$, on a :

$$\lfloor D(\Sigma / R_g)\rfloor = \left[F_{\bar{\Sigma}\to\Sigma}\right]$$

de même l'application du **PFD** à chacun des systèmes (Σ_1) et (Σ_2) à part, donne :

$\lfloor D(\Sigma_1 / R_g)\rfloor = \lfloor F_{\bar{\Sigma}_1\to\Sigma_1}\rfloor = \lfloor F_{\Sigma_2\to\Sigma_1}\rfloor + \lfloor F_{\bar{\Sigma}\to\Sigma_1}\rfloor$ (pour le système (Σ_1)).
$\lfloor D(\Sigma_2 / R_g)\rfloor = \lfloor F_{\bar{\Sigma}_2\to\Sigma_2}\rfloor = \lfloor F_{\Sigma_1\to\Sigma_2}\rfloor + \lfloor F_{\bar{\Sigma}\to\Sigma_2}\rfloor$ (pour le système (Σ_2)).
Soit :

$$\lfloor D(\Sigma / R_g)\rfloor = \lfloor D(\Sigma_1 / R_g)\rfloor + \lfloor D(\Sigma_2 / R_g)\rfloor = \lfloor F_{\Sigma_2\to\Sigma_1}\rfloor + \lfloor F_{\bar{\Sigma}\to\Sigma_1}\rfloor + \lfloor F_{\Sigma_1\to\Sigma_2}\rfloor + \lfloor F_{\bar{\Sigma}\to\Sigma_2}\rfloor$$
$$= \left[F_{\Sigma_1\to\Sigma_2}\right] + \left[F_{\Sigma_2\to\Sigma_1}\right] + \left[F_{\bar{\Sigma}\to\Sigma_1}\right] + \left[F_{\bar{\Sigma}\to\Sigma_2}\right]$$

comme

$$\left[F_{\bar{\Sigma}\to\Sigma}\right] = \lfloor F_{\bar{\Sigma}\to\Sigma_1}\rfloor + \lfloor F_{\bar{\Sigma}\to\Sigma_2}\rfloor$$

il en résulte que :

$$\lfloor D(\Sigma / R_g)\rfloor = \lfloor F_{\Sigma_1\to\Sigma_2}\rfloor + \lfloor F_{\Sigma_2\to\Sigma_1}\rfloor + \left[F_{\bar{\Sigma}\to\Sigma}\right]$$

et d'après le **PFD** :

$$\lfloor F_{\Sigma_1\to\Sigma_2}\rfloor = -\lfloor F_{\Sigma_2\to\Sigma_1}\rfloor$$

5. Puissance et travail d'une force

5.1. Puissance d'une force

Soit $\vec{F}$ une force, fonction du temps, s'exerçant sur un point matériel *P*. La puissance de $\vec{F}$ appliquée au point matériel *P* de vitesse $\vec{V}\ (P)$ à l'instant *t* est :

$$P = \vec{F}(t).\vec{V}(P)$$

Le travail élémentaire accompli pendant la durée dt est :

$$dW = Pdt = \vec{F}(t).\vec{V}(P)dt = \vec{F}(t).\overrightarrow{dP}$$

le travail accompli entre deux instants t_1 et t_2 est donc :

$$W = \int_{t_1}^{t_2} Pdt$$

5.2. Cas d'un solide indéformable

On considère un solide (S) soumis à un système de forces extérieures concentrées ou réparties à densité. Le solide étant indéformable, si Q et P sont deux points du solide, la puissance des efforts extérieurs est :

$$P = \int_{(S)} \vec{V}(P).\overrightarrow{dF} = \vec{V}(Q).\int \overrightarrow{dF} + \int (\overrightarrow{PQ} \wedge \vec{\Omega}).\overrightarrow{dF}$$

en effectuant une double permutation circulaire sur le produit mixte, on a alors :

$$P = \vec{V}(Q).\int \overrightarrow{dF} + \int (\overrightarrow{dF} \wedge \overrightarrow{PQ}).\vec{\Omega} = \vec{V}(Q).\int \overrightarrow{dF} + \vec{\Omega}.\int (\overrightarrow{QP} \wedge \overrightarrow{dF})$$

finalement, la puissance des efforts extérieurs pour un solide indéformable est le produit du torseur cinématique et du torseur des efforts extérieurs :

$$P = \vec{V}(Q).\vec{F}_{ext} + \vec{\Omega}.\vec{M}_Q(\vec{F}_{ext}) = [\vartheta]_Q \otimes [F_{ext}]_Q$$

6. Théorème de l'énergie cinétique

6.1. Cas d'un solide indéformable

Dans le cas d'un solide continu, nous avons :

$$T = \frac{1}{2}\int_{(S)} \vec{V}^2(P)dm$$

donc, si Q est un point du solide :

$$\frac{dT}{dt} = \int_{(S)} \vec{V}(P).\vec{a}(P)dm = \int_{(S)} (\vec{V}(Q) + \overrightarrow{PQ} \wedge \vec{\Omega}).\vec{a}(P)dm$$

$$= \vec{V}(Q).\int_{(S)} \vec{a}(P)dm + \vec{\Omega}.\int_{(S)} \overrightarrow{QP} \wedge \vec{a}(P)dm = [\vartheta]_Q[D]_Q$$

la dérivée de l'énergie cinétique est égale au produit des torseurs cinématique et dynamique. La dérivée de l'énergie cinétique est donc égale à la puissance des quantités d'accélération absolue.

Or, d'après le principe fondamental de la dynamique, le torseur dynamique est égal au torseur des efforts extérieurs. D'après le paragraphe 5-2, on a donc, pour un solide indéformable :

$$\boxed{\frac{dT(S/R_0)}{dt} = P(ext \to S/R_0)}$$

6.2. Cas de deux solides *(S_1)* et *(S_2)*

Si l'on considère maintenant un système Σ constitué de deux solides (S_1) et (S_2), on peut appliquer le principe de conservation de l'énergie à chacun des deux solides :

$$P(\overline{S}_1 \to S_1/R_g) = \frac{dT(S_1/R_g)}{dt} \quad \text{Et} \quad P(\overline{S}_2 \to S_2/R_g) = \frac{dT(S_2/R_g)}{dt}$$

donc :

$$\frac{dT(\Sigma/R_g)}{dt} = \frac{dT(S_1/R_g)}{dt} + \frac{dT(S_2/R_g)}{dt} = P(\overline{S}_1 \to S_1/R_g) + P(\overline{S}_2 \to S_2/R_g)$$

soit :

$$\frac{dT(\Sigma/R_g)}{dt} = \left[F_{\overline{S}_1 \to S_1}\right] \times \left[\vartheta(S_1/R_g\right] + \left[F_{\overline{S}_2 \to S_2}\right] \times \left[\vartheta(S_2/R_g\right]$$

donc :

$$\frac{dT(\Sigma/R_g)}{dt} = \left[F_{\overline{\Sigma} \to S_1} + F_{s_2 \to S_1}\right] \times \left[\vartheta(S_1/R_g\right] + \left[F_{\Sigma \to S_2} + F_{s_1 \to S_2}\right] \times \left[\vartheta(S_2/R_g\right]$$

comme $\left[F_{S_2 \to S_1}\right] = -\left[F_{S_1 \to S_2}\right]$

on en déduit :

$$\frac{dT(\Sigma/R_g)}{dt} = \sum_{i=1,2}\left[F_{\overline{\Sigma} \to S_i}\right] \times \left[\vartheta(S_i/R_g)\right] + \left[F_{S_1 \to S_2}\right] \times \left[\vartheta(S_2/R_g) - \vartheta(S_1/R_g)\right]$$

ou encore

$$\boxed{\frac{dT(\Sigma/R_g)}{dt} = P(\overline{\Sigma} \to \Sigma/R_g) + P(S_1 \leftrightarrow S_2)}$$

La puissance développée par les efforts extérieurs et intérieurs au système (Σ) est égale à la variation de l'énergie cinétique du système. Ceci se généralise naturellement à un système de *n* solides.