Précision des mesures et expression des résultats

La construction d'un triangle

On construit un triangle ABC isocèle en mesurant sa base BC et ses angles A = B.
On mesure AB = 50 mm et A = B = 80°.
On appelle I le milieu de AB.

1. Si les angles et AB étaient mesurés parfaitement, quelles seraient les longueurs des côtés AC et BC ?
2. Si les angles A et B sont mesurés à 1° près (c'est-à-dire si $79 \leq A \leq 81°$) entre quelles valeurs sont compris AC et BC ?
3. Quelle est alors la valeur moyenne (AC_{moyen}) de AC ?
4. Ecrire AC sous la forme $AC = AC_{moyen} \pm x$.
5. Quel est l'écart relatif entre les valeurs extrêmes de AC ?

   Calculer $y = \dfrac{AC_{max} - AC_{min}}{AC_{moyen}}$.

   Commenter.

Correction

▸ **1.** Dans le triangle ABC isocèle, CI est médiane et hauteur. Les triangles ACI et BCI sont rectangles.

On a : $\cos A = \dfrac{AI}{AC} = \dfrac{AB}{2AC}$; $AC = BC = \dfrac{AB}{2\cos A}$

Application numérique : $AC = \dfrac{5}{2\cos 80°}$; $AC = BC = 144$ mm.

▸ **2.** On a $79 \leq A \leq 81$.

Donc $AC_{min} = \dfrac{AB}{2\cos A_{max}}$ et $AC_{max} = \dfrac{AB}{2\cos A_{min}}$

On a $AC_{min} = \dfrac{5}{2\cos 81°} = 131$ mm et $AC_{max} = \dfrac{5}{2\cos 79°} = 160$ mm

donc $131 \leq AC \leq 160$ mm

▸ **3.** On a :

$AC_{moyen} = \dfrac{AC_{min} + AC_{max}}{2}$; $AC_{moyen} = \dfrac{131,... + 160,...}{2}$;

$AC_{moyen} = 145$ mm.

▸ **4.** On a

$x = AC_{max} - AC_{moyen} = AC_{moyen} - AC_{min}$

$x = 159,8... - 145,4... = 14,4... = 15$

$x = 145 \pm 15$ mm

▸ **5.** On a $y = \dfrac{159,8... - 131,...}{145,4...} = 0,20 = 20$ %.

Un petit écart sur la mesure des angles occasionne une grande imprécision sur les longueurs.

Remarque : les calculs sont effectués avec beaucoup de chiffres, mais on n'en garde que 2 ou 3 dans l'expression des résultats.

2 Précision des données et formules approchées

L'atome d'hydrogène

On assimile l'atome d'hydrogène à une sphère de rayon R = 0,53 Å. Cela signifie que $0{,}52 \leq R \leq 0{,}54$ Å.

1. Calculer, en unités SI, le volume de cet atome pour la valeur de R = 0,53 Å.
2. Donner un encadrement de ce volume V : $V_{min} \leq V \leq V_{max}$.
3. Quelle est la valeur moyenne (V_{moyen}) de ce volume ?
   Ecrire V sous la forme $V = V_{moyen} \pm x$.
4. Au lieu d'utiliser la formule exacte donnant V, on se contente d'une formule approchée en écrivant $\pi = 3$. La valeur approchée V' de ce volume V est alors $V' = 4R^3$. Calculer V' pour l'atome d'hydrogène.
5. La valeur V' est-elle acceptable ?
6. L'erreur relative que l'on commet en faisant $\pi = 3$ est $y = \dfrac{V - V'}{V}$.
   Exprimer littéralement y, puis le calculer.
7. Calculer $z = \dfrac{V_{max} - V_{moyen}}{V_{moyen}} = \dfrac{V_{moyen} - V_{min}}{V_{moyen}}$; comparer y et z et conclure.

Correction

▸ **1.** Le volume V d'une sphère de rayon R est $V = \dfrac{4\pi R^3}{3}$; si R est en m, V est en m^3 (unités SI).

1 Å = 10^{-10} m. On a donc $V = \dfrac{4\pi(0{,}53.10^{-10})^3}{3} = 6{,}24.10^{-31}\,m^3$.

▸ **2.** On calcule de même V_{min} en remplaçant R par 0,52 Å et V_{max} en remplaçant R par 0,54 Å. On obtient :

$V_{min} = 5{,}89.10^{-31}$ m^3 et $V_{max} = 6{,}60.10^{-31}$ m^3.

On a donc : $5{,}89.10^{-31} \le V \le 6{,}60.10^{-31}\,m^3$

▸ **3.** On a

$$V_{moyen} = \frac{V_{max} + V_{min}}{2} = \frac{(5{,}89 + 6{,}60)10^{-31}}{2} = 6{,}24.10^{-31}\,m^3$$

$$x = V_{max} - V_{moyen} = V_{moyen} - V_{min} = 0{,}36.10^{-31}\,m^3$$

$$V = 6{,}24.10^{-31} \pm 0{,}36.10^{-31}\,m^3$$

▸ **4.** On a $V' = 4.(0{,}53.10^{-10})^3 = 5{,}96.10^{-31}\,m^3$.

▸ **5.** V' est compris entre V_{min} et V_{max}, il est donc acceptable.

▸ **6.** On a $y = \dfrac{\dfrac{4\pi R^3}{3} - 4R^3}{\dfrac{4\pi R^3}{3}} = \dfrac{\pi - 3}{3} = 4{,}5.10^{-2} = 5\ \%$

▸ **7.** On a $z = \dfrac{6{,}60.10^{-31} - 6{,}24.10^{-31}}{6{,}24.10^{-31}} = 5{,}8.10^{-2} = 6\ \%$.

On voit que y et z sont du même ordre. On ne commet pas plus d'erreur en utilisant la formule approchée, qu'en exprimant les données avec 2 chiffres significatifs.

Précision des mesures et hypothèses simplificatrices

Un tube à essais

Pour connaître la contenance d'un tube à essais, on mesure ses dimensions : sa hauteur h = 180 mm et son diamètre d = 10,5 mm.

1. On fait une hypothèse simplificatrice : on assimile le tube à un cylindre à fond plat, de hauteur h et de diamètre d. Exprimer son volume intérieur V_1 en fonction de h et de d. Calculer V_1 (en mL).
2. En fait, le fond du tube est une demie sphère de diamètre d. Exprimer V_2, valeur plus exacte du volume, en fonction de d et de h. Calculer V_2 (en mL).
3. Calculer l'écart $x = \dfrac{V_1 - V_2}{V_2}$.
4. On compare x à l'erreur y due à la précision des mesures ; d et h sont mesurés au demi mm près, voire moins, de sorte que :
   $179{,}5 \leq h \leq 180{,}5$ mm
   $10{,}0 \leq d \leq 10{,}5$ mm
   Entre quelles valeurs V_{1min} et V_{1max} varie le volume en gardant l'hypothèse simplificatrice ?
   ($V_{1\,min} \leq V_1 \leq V_{1\,max}$)
   Calculer enfin $y = \dfrac{V_{1\,min} - V_{1\,max}}{V_1}$.
5. L'hypothèse simplificatrice est-elle justifiée ?
6. Quelle autre cause d'erreur a-t-on négligée ?
7. Quelle est la contenance probable que le fabricant a donnée pour ce tube ?

Correction

‣ **1.** On a $V_1 = \frac{\pi d^2 h}{4}$; $V_1 = \frac{\pi(1{,}05)^2 \times 18}{4}$; $V_1 = 15{,}6$ mL.
V_1 est en mL si d et h sont en cm.

‣ **2.** Le tube est alors un cylindre de hauteur $h - \frac{d}{2}$, associé à une demie sphère de rayon $\frac{d}{2}$; le cylindre a pour volume $\frac{\pi d^2}{4}\left(h - \frac{d}{2}\right)$ et la demie sphère a pour volume $\frac{1}{2}.\frac{4\pi}{3}.\left(\frac{d}{2}\right)^2$. V_2 est la somme de ces deux volumes. Il vient $V_2 = \frac{\pi d^2 h}{4} - \frac{\pi d^3}{24}$. En remplaçant d par 1,05 cm et h par 18 cm, il vient V_2 = 15,4 mL.

‣ **3.** Pour calculer x, on garde une grande précision sur V_1 et V_2 et il vient $x = \frac{15{,}59... - 15{,}43...}{15{,}...} = 0{,}01 = 1\ \%$.

‣ **4.** On a
$V_{1\min} = \frac{\pi}{4}(1{,}0)^2.17{,}95 = 14{,}10$ mL ; $V_{1\max} = \frac{\pi}{4}(1{,}05)^2.18{,}05 = 15{,}63$ mL.
$y = \frac{15{,}63... - 14{,}10...}{15{,}6...} = 0{,}10 = 10\ \%$

‣ **5.** L'hypothèse simplificatrice est justifiée car l'erreur due aux mesures (y) est bien supérieure à celle due à cette hypothèse (x).

‣ **6.** On a confondu la hauteur extérieure (h) et la hauteur intérieure. Il aurait aussi fallu tenir compte de l'épaisseur du tube quand on a mesuré sa hauteur.

‣ **7.** Il s'agit d'un tube de contenance 15 mL.

4 Angles, arcs, lignes trigonométriques

1. On considère un cercle de centre O et de rayon r, et un arc $\widehat{AB}$ sur ce cercle. On pose $\widehat{AOB} = \alpha$ et $\widehat{AB} = l$. Montrer qu'on a la relation : $l = r.\alpha$, avec α en radians.

2. On considère le cercle trigonométrique et un angle α compris entre 0 et 90°. Montrer qu'on a toujours sin α < α en radians < tan α.

3. Montrer que pour α < 20° on peut confondre α (rad), sin α et tan α. Calculer l'erreur commise en %.

Correction

▸ **1.** On a π (rad) = 180°.

Quand on tourne de 180° on tourne de π radians et on parcourt une demie circonférence, c'est-à-dire la longueur πr.

$\pi(\text{rad}) \rightarrow \pi.\text{r}$

$\alpha(\text{rad}) \rightarrow \text{l}$

On a donc l = r.α.

▸ **2.**

OM = 1 unité

$\alpha = \widehat{\text{COM}}$

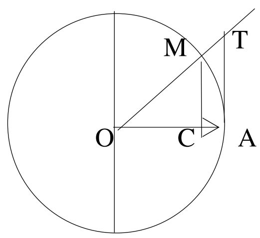
$\text{MC} = \sin\alpha$

$\overset{\frown}{\text{AM}} = \alpha\,(\text{en rad})$

$\text{TA} = \tan\alpha$

$\text{MC} < \overset{\frown}{\text{AM}} < \text{TA}$

$\sin\alpha < \alpha\,(\text{en rad}) < \tan\alpha$



▸ **3.** Si α =20°, on a $\alpha = 0{,}349$ rad

On lit sin 20° = 0,342 ; tan 20° = 0,364 .

On compare les valeurs de sin et tan à la valeur de l'angle en radians :

$$\frac{\alpha - \sin\alpha}{\alpha} = \frac{0{,}349 - 0{,}342}{0{,}349} = 2\ \%$$

$$\frac{\tan\alpha - \alpha}{\alpha} = \frac{0{,}364 - 0{,}342}{0{,}349} = 4\ \%$$

Les erreurs relatives sont donc petites.