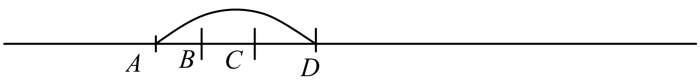
1. Un ébranlement vu de différents référentiels

Une corde tendue horizontalement est soumise à un ébranlement transversal de faible amplitude (l’arc AD sera assimilé à un arc de cercle). Il atteint successivement les points A, B, C, D de la corde tels que $AB = BC = CD = l$. Le point A est atteint à l’instant initial, le point B à l’instant t, le point C à l’instant $2t$ et le point D à l’instant $3t$.



1. Exprimer la célérité V de l’ébranlement en fonction de l et de t.

2. Dessiner l’aspect de la corde à l’instant initial et à t, $2t$, et $3t$.

3. On se place dans un référentiel animé d’un mouvement de translation parallèlement à la corde à la vitesse V et dans le même sens que celui de la propagation. Dessiner l’aspect de la corde dans ce référentiel à un instant quelconque.

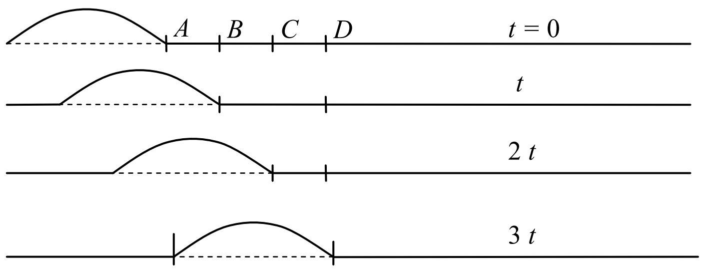
4. Dessiner dans ce référentiel la corde avec les positions de A, B, C, D aux instants 0, t, $2t$, et $3t$.

5. Quel est le mouvement de A entre 0 et $3t$ dans ce référentiel ?

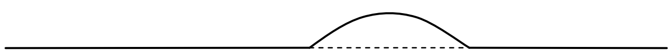
Correction

▸ **1.** Le front de l'ébranlement parcourt la distance AB entre les instants 0 et t, on a donc $V = l\,/\,t$.

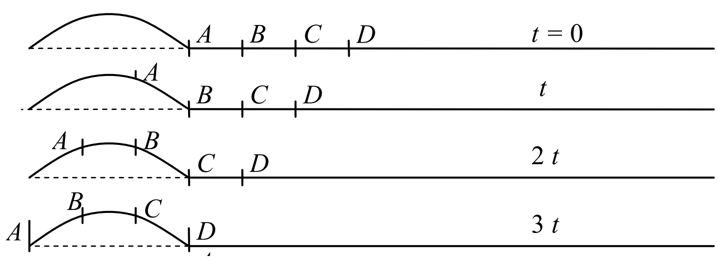
▸ **2.** On a



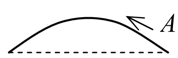
▸ **3.** L'ébranlement paraît immobile. La corde a l'aspect suivant.



▸ **4.** On a

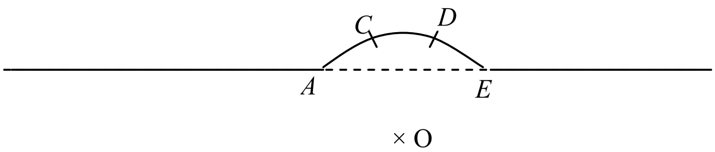


▸ **5.** Dans le référentiel du laboratoire, A décrit un segment vertical d'abord vers le haut puis vers le bas. Dans le référentiel en mouvement, un point fixe de la corde se déplace vers la gauche à la vitesse $-\vec{V}$. Le point A décrit dans ce référentiel un mouvement résultant de la composition de ces 2 mouvements, il décrit donc un arc de courbe vers la gauche.

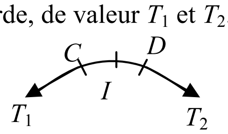


2. La célérité d'un ébranlement

On considère une corde homogène de masse m et de masse par unité de longueur μ. Elle est tendue horizontalement et soumise à un ébranlement transversal de faible amplitude qu'on assimile à un petit arc de cercle de rayon R et de centre O.



Pour étudier la célérité V de cet ébranlement le long de la corde, on se place dans un référentiel animé d'un mouvement de translation de vitesse V parallèle à la corde. Une petite portion de corde CD située entre A et B semble alors tourner le long de l'arc de corde à la vitesse V (voir exercice précédent).
Le mouvement de cet élément de corde est dû aux forces de tension exercées par le restant de la corde, de valeur T_1 et T_2.



On suppose que la valeur de la tension est constante : $T_1 = T_2 = T$.

1. Soit α l'angle entre OC et OD. Exprimer CD en fonction de α et R.

2. Quelle est la direction de la résultante $\vec{F}$ des tensions $\vec{T_1}$ et $\vec{T_2}$?

3. Exprimer la valeur de cette résultante en fonction de T et α ; α étant petit, on confondra $\sin \alpha$ et α en radians.

4. Exprimer les accélérations normale et tangentielle subies par l'élément CD en appliquant la $2^{\text{ème}}$ loi de Newton.

5. En déduire l'expression de V, célérité de l'ébranlement en fonction de T, tension de la corde et de μ.

BONUS. On pourra vérifier que V a la dimension d'une vitesse.

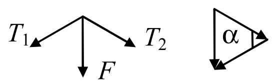
Correction

1. Par définition du radian, $\overset{\frown}{CD} = R.\alpha$ avec α en radians.

2. $\vec{T_1}$ et $\vec{T_2}$ sont tangents au petit arc de corde $\overset{\frown}{CD}$. Donc $\vec{T_1}$ est perpendiculaire à OC et $\vec{T_2}$ est perpendiculaire à OD. L'angle entre $\vec{T_1}$ et $\vec{T_2}$ est donc égal à α. $\vec{F}$ a la direction de la diagonale du parallélogramme (qui est un losange) construit sur $\vec{T_1}$ et $\vec{T_2}$, et est par symétrie dirigé selon IO.

3. On a $\dfrac{F}{2} = T.\sin\dfrac{\alpha}{2}$ donc

$F = 2.T.\sin\dfrac{\alpha}{2} = T.\alpha$ avec α en radians.



4. Soit $\vec{a}$ l'accélération de l'élément de corde CD. On a d'après la 2ème loi de Newton, $\vec{F} = m.\vec{a}$ et $\vec{a} = \vec{a_N} + \vec{a_T}$ où $\vec{a_N}$ est l'accélération normale et $\vec{a_T}$ l'accélération tangentielle de l'élément de corde. $\vec{F}$ a la direction de IO, on a donc $a_T = 0$ et $a_N = \dfrac{V^2}{R} = a$. (V est la vitesse de l'élément de corde, et c'est aussi, d'après l'exercice précédent, la célérité de l'ébranlement le long de la corde).

5. Il vient $\dfrac{V^2}{R} = a = \dfrac{F}{m} = \dfrac{T.\alpha}{m}$; $m = \mu.\overset{\frown}{CD} = \mu.R.\alpha$.

Donc $\dfrac{V^2}{R} = \dfrac{T.\alpha}{\mu.R.\alpha} = \dfrac{T}{\mu.R}$ et enfin $V = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$. La célérité de l'onde ne dépend que de la masse par unité de longueur de la corde et de sa tension.

BONUS. On a

$$V = \sqrt{\frac{T \text{ en N}}{\mu \text{ en kg.m}^{-1}}} = \sqrt{\frac{T \text{ en kg.m.s}^{-2}}{\mu \text{ en kg.m}^{-1}}} = \text{en}\sqrt{\text{m}^2.\text{s}^{-2}} = \text{en m.s}^{-1}.$$

3. Une corde verticale

Une corde de longueur $l = 20$ m et de masse $m = 5$ kg est suspendue verticalement par son extrémité supérieure O. Sa masse linéique $\mu = m / l$ est constante. On communique à la partie inférieure de cette corde un ébranlement en l'écartant de sa position d'équilibre.

1. On considère un petit morceau de cette corde, de longueur Δx et de masse négligeable, situé en M à la distance $OM = x$. Exprimer la tension T à laquelle il est soumis, la cause de cette tension étant le poids d'une partie de la corde à analyser.

2. La vitesse V de propagation d'un ébranlement le long d'une corde soumise à une tension T est donnée par la formule $V = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$. Exprimer cette vitesse le long de la corde verticale en fonction de x.

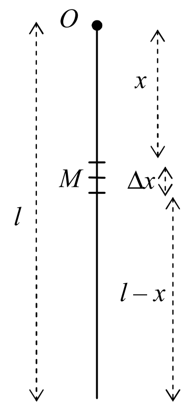
3. En quels points de la corde cette vitesse est-elle minimale ? Maximale ? Calculer les valeurs de la vitesse correspondantes.

BONUS. Donner l'allure du graphe de la vitesse en fonction de x. Prévoir sans calcul si la vitesse moyenne de l'ébranlement est supérieure ou inférieure à la moitié de sa valeur maximale.

On prendra g = 10 SI.

Correction

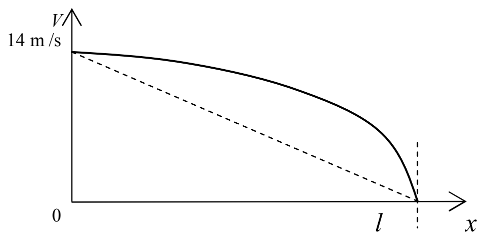
▸ ***1.*** En *M,* l'élément Δx (extrêmement petit, donc de longueur négligeable par rapport à l) subit le poids P de la partie de la corde au-dessous de lui, et il y en a une longueur $(l - x)$. La partie de la corde au-dessus de lui exerce une tension T qui équilibre ce poids. On a donc
$P = T = \mu(l - x).g$.



▸ ***2.*** La vitesse de l'ébranlement en x est donc
$V(x) = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}} = \sqrt{\dfrac{\mu(l-x).g}{\mu}} = \sqrt{(l-x).g}$.

▸ ***3.*** On a x qui varie entre 0 (haut de la corde) et l (bas de la corde).
Si $x = l$ on a $V = 0$. La vitesse de propagation est minimale en bas de la corde. Si $x = 0$ la vitesse de propagation est maximale et vaut
$V(0) = \sqrt{l.g} = \sqrt{20 \times 10} = 14$ m /s.

BONUS. On a



La courbe $V(x)$ est constamment au-dessus de la droite, donc la vitesse moyenne est supérieure à la moitié de la vitesse maximale.

4. La durée d'un ébranlement

On considère une corde verticale de longueur $l = 20$ m et de masse $m = 5$ kg suspendue verticalement par son extrémité supérieure O. On communique à cette corde un ébranlement à sa partie inférieure A, ébranlement qui monte le long de la corde. On a vu (exercice précédent) que la vitesse de propagation de cet ébranlement n'est pas constante le long de la corde.
Soit x la distance parcourue depuis le bas de la corde par l'ébranlement. La vitesse de propagation le long de la corde est alors donnée par la formule $V(x) = \sqrt{g.x}$.

1. En utilisant la définition de la vitesse $V = \dfrac{dx}{dt}$, exprimer le temps dt que met l'ébranlement à parcourir la distance dx en fonction de V, puis en fonction de x.

2. Exprimer puis calculer le temps Δt que met l'ébranlement à atteindre le haut de la corde.

3. Calculer le temps t qu'il met à parcourir chaque moitié de corde. Que peut-on en conclure ?

BONUS. On pourra calculer la distance parcourue par l'ébranlement pendant la première seconde, puis pendant la deuxième et commenter.

Une primitive de $\dfrac{1}{\sqrt{a.x}}$ *est* $\dfrac{2\sqrt{a.x}}{a}$. *On prendra g = 10 SI.*

Correction

▸ **1.** L'ébranlement met le temps dt à parcourir la longueur dx. On a

$$dt = \frac{dx}{V} = \frac{dx}{\sqrt{g.x}} .$$

▸ **2.** Pour avoir Δt il faut intégrer dt quand x varie de 0 à l. On a

$$\Delta t = \int_{t(0)}^{t(l)} dt = \int_0^l \frac{dx}{\sqrt{g.x}} = \left[\frac{2\sqrt{g.x}}{g}\right]_0^l = \left[\sqrt{\frac{4.x}{g}}\right]_0^l = \sqrt{\frac{4.l}{g}}.$$

On a donc $\Delta t = \sqrt{\dfrac{4\times 20}{10}} = 2{,}8 \text{ s}$.

▸ **3.** La première moitié de corde, x varie entre 0 (bas de la corde) et $\dfrac{l}{2}$.

Le temps mis par l'ébranlement est

$$\Delta t_1 = \left[\sqrt{\frac{4.x}{g}}\right]_0^{l/2} = \sqrt{\frac{2.l}{g}} = \sqrt{\frac{40}{10}} = 2{,}0 \text{ s} .$$

La deuxième moitié, x varie entre $\dfrac{l}{2}$ et l (haut de la corde). Le temps mis par l'ébranlement est

$$\Delta t_2 = \left[\sqrt{\frac{4.x}{g}}\right]_{l/2}^{l} = \sqrt{\frac{4.l}{g}} - \sqrt{\frac{2.l}{g}} = 2{,}8 - 2{,}0 = 0{,}8 \text{ s} .$$

On voit que plus l'ébranlement monte le long de la corde, plus il va vite (il met moins de temps à parcourir des distances égales).

BONUS. La 1$^{\text{ère}}$ s, l'ébranlement met le temps $\Delta t'_1$ = 1 s à parcourir la distance x_1 et on a

$$\Delta t'_1 = \left[\sqrt{\frac{4.x}{g}}\right]_0^{x_1} = \sqrt{\frac{4x_1}{g}} \; ; \Delta x_1 = x_1 - 0 = \frac{t'^2_1 .g}{4} = \frac{1\times 10}{4} = 2{,}5 \text{ m}.$$

Pendant les 2 premières secondes, l'ébranlement parcourt la distance x_2 pendant le temps $\Delta t'_2$ = 2 s et on a

$$t'_2 = \sqrt{\frac{4x_2}{g}} \; ; \Delta x_2 = \frac{t'^2_2 .g}{4} = \frac{2^2\times 10}{4} = 10 \text{ m} .$$

La 2$^{\text{ème}}$ s, l'ébranlement parcourt la distance $\Delta x_2 - \Delta x_1$ = 10 – 2,5 = 7,5 m. L'ébranlement parcourt des distances de plus en plus grandes en des temps égaux, il va de plus en plus vite.