

# Table des matières

Notations et abréviations	xiii
<b>I Signaux déterministes</b>	<b>1</b>
<b>1 Outils mathématiques</b>	<b>3</b>
1.1 Intégrale de Lebesgue	3
1.1.1 Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$	3
1.1.2 Intégrale de Lebesgue et espaces $L^p$ associés	4
1.1.3 Intégrales à paramètre et théorème de Fubini	5
1.2 Espace de Hilbert	6
1.2.1 Définition et propriétés	6
1.2.2 Projection orthogonale et bases hilbertiennes	8
1.2.3 Exemples de bases hilbertiennes	10
1.2.4 Application : séries de Fourier	12
1.3 Fonctions analytiques et intégration	14
1.3.1 Fonctions holomorphes	14
1.3.2 Fonctions analytiques	15
1.3.3 Intégration complexe et formule de Cauchy	17
1.3.4 Séries de Laurent et théorème des résidus	19
1.4 Programmes et algorithmes	22
1.4.1 Orthogonalisation de Gram-Schmidt	22
1.4.2 Calcul de résidus et intégration	23
1.4.3 Séries de Fourier, phénomène de Gibbs	25
1.5 Annexe : mesures et intégrale de Stieltjès	26
1.6 Références et compléments	29
1.7 Exercices	30
1.8 Thème d'étude : séries de Fourier	34
<b>2 Systèmes différentiels et signaux</b>	<b>37</b>
2.1 Système différentiel	37
2.1.1 Théorème de Cauchy-Lipschitz	37
2.2 Systèmes linéaires stationnaires	38
2.2.1 Oscillateur linéaire	38
2.2.2 Oscillateur amorti : système dissipatif	39

2.2.3	Expression générale des solutions . . . . .	40
2.2.4	Points fixes d'un système différentiel linéaire . . . . .	41
2.2.5	Quasi-périodicité : pendule double . . . . .	42
2.3	Systèmes différentiels linéaires . . . . .	43
2.3.1	Résolvante et expression des solutions . . . . .	44
2.4	Systèmes dynamiques non linéaires . . . . .	45
2.4.1	Points fixes d'un système autonome . . . . .	46
2.4.2	Pendule non linéaire libre . . . . .	46
2.4.3	Oscillateur auto-entretenu : Van der Pol . . . . .	47
2.4.4	Chaos en dimension 3 : le modèle de Lorenz . . . . .	49
2.5	Programmes et simulations . . . . .	52
2.5.1	Résolution exacte d'équations différentielles . . . . .	52
2.5.2	Résolution numérique des équations différentielles . . . . .	53
2.6	Références et compléments . . . . .	55
2.7	Exercices . . . . .	56
2.8	Thèmes d'étude . . . . .	58
2.8.1	Fonctions de Bessel . . . . .	58
2.8.2	Algorithme de Putzer . . . . .	61
<b>3</b>	<b>Convolution et Fourier</b> . . . . .	<b>63</b>
3.1	Convolution sur $\mathbb{R}$ . . . . .	63
3.1.1	Définition et existence . . . . .	63
3.1.2	Opérateur de convolution . . . . .	64
3.1.3	Convolution et régularisation . . . . .	65
3.2	Transformation de Fourier . . . . .	67
3.2.1	TF sur $L^1$ , propriétés . . . . .	67
3.2.2	Dérivation et comportement à l'infini . . . . .	69
3.2.3	Inversion de la transformation de Fourier . . . . .	69
3.2.4	TF sur $\mathcal{S}$ et $L^2$ . . . . .	70
3.2.5	Relation d'incertitude (Heisenberg) . . . . .	72
3.3	Transformation de Laplace sur $\mathbb{R}^+$ . . . . .	73
3.3.1	Définition, propriétés . . . . .	73
3.3.2	Inversion de la transformation de Laplace . . . . .	76
3.3.3	Application aux systèmes différentiels linéaires . . . . .	78
3.4	Programmes et applications . . . . .	78
3.4.1	Calcul symbolique de la transformation de Laplace . . . . .	78
3.4.2	TF de fraction rationnelle . . . . .	80
3.4.3	Transformation de Fourier, convolution . . . . .	81
3.4.4	Fonctions splines cubiques . . . . .	82
3.5	Références et compléments . . . . .	84
3.6	Exercices . . . . .	85
3.7	Thème d'étude : TL de fonctions causales . . . . .	90
3.7.1	TL d'une fonction de $L^2(0, \infty)$ . . . . .	90
3.7.2	Réciproque du théorème (Paley-Wiener) . . . . .	91

<b>4 Distributions</b>	<b>93</b>
4.1 Dualité, exemple de la masse de Dirac	94
4.1.1 Approximation de $\delta$	94
4.1.2 Dualité, exemples	94
4.2 Distributions, opérations et propriétés	95
4.2.1 L'espace $\mathcal{D}'$ des distributions de Schwartz	95
4.2.2 Opérations sur les distributions	97
4.2.3 Convolution des distributions	100
4.3 Espace $\mathcal{S}'$ et transformation de Fourier	101
4.3.1 TF des distributions, propriétés	102
4.3.2 TF des distributions à support borné	103
4.3.3 Applications et propriétés de $\mathcal{D}'$	104
4.3.4 Compléments : TF d'une mesure bornée	107
4.4 Programmes et simulations	108
4.4.1 Noyau de Fejer et peigne de Dirac	108
4.4.2 Splines, TF, équation d'échelle	109
4.5 Références et compléments	111
4.6 Exercices	111
<b>5 Signaux et systèmes à temps discret</b>	<b>115</b>
5.1 Échantillonnage, théorème de Shannon	115
5.1.1 Échantillonnage, peigne de Dirac et TF	116
5.1.2 Reconstruction du signal, formule de Shannon	117
5.1.3 Signaux à bande limitée et propriétés	120
5.2 Convolution sur $\mathbb{Z}$	122
5.2.1 Convolution discrète et filtres numériques	122
5.2.2 Filtres réalisables : équations aux Différences Finies	124
5.3 Transformée en $\mathbb{Z}$ et systèmes numériques	127
5.3.1 Définition et propriétés	127
5.3.2 Inversion de la TZ	129
5.4 Transformation de Fourier sur $\mathbb{Z}$ et TFD	131
5.4.1 TF des suites numériques	131
5.4.2 Vers la TFD : horizon d'observation fini	133
5.4.3 La TFD : échantillonnage en fréquence	134
5.5 Transformée de Fourier Rapide (FFT)	135
5.5.1 Principe de la FFT et complexité	135
5.5.2 Mise en œuvre, organisation des données	136
5.6 Filtrage numérique, exemples	137
5.6.1 Propriétés des filtres numériques	138
5.6.2 Synthèse de filtres à partir du spectre	141
5.7 Programmes et simulations	142
5.7.1 Repliement spectral pour la Lorentzienne	142
5.7.2 TZ, EDF, convolution, filtrage (symbolique)	144
5.7.3 Calcul de la transformation de Fourier par FFT	146
5.7.4 TZ, EDF, convolution, filtrage (numérique)	147
5.8 Références et compléments	148

5.9	Exercices . . . . .	148
5.10	Thème d'étude : Paley-Wiener $BL^2_\sigma$ . . . . .	152
<b>6</b>	<b>Moyennes, corrélation, densité spectrale</b>	<b>155</b>
6.1	Fonctions de corrélation et DSP . . . . .	155
6.1.1	Définition et propriétés . . . . .	156
6.1.2	Exemples de signaux, corrélation et densité spectrale . . . . .	157
6.2	Fonctions de type positif, mesure spectrale . . . . .	161
6.2.1	Analyse spectrale à horizon fini $T$ . . . . .	161
6.2.2	Mesure spectrale : théorème de Bochner . . . . .	162
6.2.3	Filtrage, corrélation et DSP . . . . .	165
6.3	Moyennes et signaux stationnaires . . . . .	166
6.3.1	Moyennes temporelles . . . . .	166
6.3.2	Fonctions de carré moyennable . . . . .	168
6.3.3	Fonctions stationnaires . . . . .	169
6.4	Application aux fonctions presque périodiques . . . . .	171
6.4.1	Propriétés élémentaires des fonctions de $\mathcal{Q}$ . . . . .	171
6.4.2	Série de Fourier-Bohr de $x \in \mathcal{Q}$ . . . . .	171
6.4.3	Convergence de la série de Fourier-Bohr dans $\mathcal{M}_2$ . . . . .	172
6.4.4	Corrélation et spectre des fonctions de $\mathcal{Q}$ . . . . .	173
6.5	Fonctions pseudo-aléatoires . . . . .	174
6.5.1	Définition . . . . .	174
6.5.2	Construction de fonctions pseudo-aléatoires . . . . .	174
6.5.3	Trajectoires de systèmes chaotiques . . . . .	176
6.6	Programmes et applications . . . . .	179
6.6.1	Calcul symbolique de corrélations et DSP . . . . .	179
6.6.2	Calcul numérique de corrélations et DSP, applications . . . . .	182
6.7	Références et compléments . . . . .	187
6.8	Exercices . . . . .	187
6.9	Thème d'étude : presque-périodicité de Bohr . . . . .	191
<b>II</b>	<b>Signaux aléatoires</b>	<b>193</b>
<b>7</b>	<b>Outils de probabilité</b>	<b>195</b>
7.1	Modèle probabiliste . . . . .	195
7.1.1	Tribu d'évènements sur $\Omega$ . . . . .	195
7.1.2	Indépendance et conditionnement . . . . .	196
7.2	Variables et vecteurs aléatoires . . . . .	197
7.2.1	Définition, tribu et loi . . . . .	197
7.2.2	Espérance Mathématique . . . . .	198
7.2.3	Indépendance des variables aléatoires . . . . .	201
7.2.4	Addition de variables aléatoires indépendantes . . . . .	202
7.3	Lois de probabilité classiques . . . . .	203
7.4	Vecteurs gaussiens . . . . .	206
7.5	Loi des grands nombres et statistique . . . . .	207

7.5.1	Estimateur de la moyenne . . . . .	208
7.5.2	Le Théorème de limite-centrale . . . . .	209
7.5.3	Loi forte des grands nombres . . . . .	210
7.6	Programmes et simulations . . . . .	212
7.6.1	Outils de statistique descriptive . . . . .	212
7.6.2	Génération de lois . . . . .	212
7.6.3	Statistique : test du Khi-2, intervalles de confiance . . . . .	215
7.7	Compléments, statistique . . . . .	219
7.7.1	Outils pour la loi des grands nombres . . . . .	219
7.7.2	Différentes convergences de variables aléatoires . . . . .	219
7.7.3	Estimateurs statistiques, propriétés . . . . .	220
7.8	Références et compléments . . . . .	221
7.9	Exercices . . . . .	222
7.10	Thème d'étude : modèle gaussien . . . . .	225
<b>8</b>	<b>Processus aléatoires et signaux</b>	<b>229</b>
8.1	Définition, loi . . . . .	229
8.1.1	Exemples simples . . . . .	230
8.1.2	Loi d'un processus aléatoire . . . . .	232
8.1.3	Moments d'un processus aléatoire . . . . .	233
8.1.4	Stationnarité d'un processus . . . . .	233
8.2	Différentes classes de processus . . . . .	234
8.2.1	Processus indépendant, Bruit blanc . . . . .	234
8.2.2	Processus gaussiens . . . . .	235
8.2.3	Processus à accroissements indépendants . . . . .	235
8.2.4	Processus markoviens . . . . .	236
8.3	Processus de Wiener-Lévy . . . . .	237
8.3.1	Définition et construction . . . . .	237
8.3.2	Application : Bruit blanc à temps continu . . . . .	239
8.3.3	Intégrale de Wiener, filtrage du bruit blanc . . . . .	240
8.4	Processus de Poisson . . . . .	242
8.4.1	Définition et construction . . . . .	242
8.4.2	Propriétés du Processus de Poisson . . . . .	242
8.5	Références et compléments . . . . .	244
8.6	Exercices . . . . .	245
8.7	Thème d'étude : chaînes de Markov . . . . .	248
<b>9</b>	<b>Signaux aléatoires stationnaires</b>	<b>251</b>
9.1	Corrélation, DSP et filtrage . . . . .	252
9.1.1	Propriétés du second ordre . . . . .	252
9.1.2	Intercorrélation, densité interspectrale . . . . .	253
9.1.3	Filtrage des processus stationnaires . . . . .	255
9.1.4	Formule des interférences . . . . .	256
9.2	Modèles de signaux stationnaires . . . . .	258
9.2.1	Signaux quasi-périodiques . . . . .	258
9.2.2	Modèle AR . . . . .	260

9.2.3	Modèle MA . . . . .	261
9.2.4	Modèle ARMA . . . . .	263
9.3	Estimation en m.q. dans $L^2(\Omega)$ . . . . .	263
9.3.1	Espérance conditionnelle . . . . .	264
9.3.2	Estimation linéaire en moyenne quadratique . . . . .	264
9.4	Prédiction linéaire et modélisation des signaux . . . . .	266
9.4.1	Prédiction et modélisation AR( $p$ ) . . . . .	266
9.4.2	Prédiction à passé infini, innovation . . . . .	269
9.4.3	Décomposition de Wold . . . . .	270
9.4.4	Factorisation spectrale, Paley-Wiener . . . . .	272
9.5	Programmes et simulations . . . . .	274
9.5.1	Algorithmes de calcul . . . . .	274
9.5.2	Application : modélisation AR, factorisation spectrale . . . . .	276
9.6	Références et compléments . . . . .	280
9.7	Exercices . . . . .	280
9.8	Thèmes d'étude . . . . .	286
9.8.1	Prédiction linéaire itérative, Algorithme de Levinson . . . . .	286
9.8.2	Condition de Paley-Wiener . . . . .	286
<b>10</b>	<b>Estimation et ergodisme des processus</b> . . . . .	<b>289</b>
10.1	Estimation des moyennes et corrélations . . . . .	289
10.1.1	Estimation de la moyenne . . . . .	290
10.1.2	Estimation de la corrélation . . . . .	291
10.1.3	Compléments sur la convergence p.s. . . . .	293
10.1.4	Corrélogramme, compromis biais-variance . . . . .	294
10.2	Analyse spectrale . . . . .	294
10.2.1	Corrélogrammes et leur TF . . . . .	297
10.2.2	Périodogramme, Théorème de Wiener-Kintchine . . . . .	298
10.2.3	Convergence étroite du périodogramme . . . . .	300
10.2.4	Mise en œuvre pratique : moyennage, fenêtrage . . . . .	301
10.3	Théorie ergodique et applications . . . . .	305
10.3.1	Système dynamique et mesure invariante . . . . .	305
10.3.2	Application aux processus aléatoires SSF . . . . .	307
10.3.3	Application aux systèmes dynamiques sur $E = [0, 1]$ . . . . .	309
10.4	Programmes, algorithmes, simulations . . . . .	312
10.4.1	Corrélation et applications . . . . .	313
10.4.2	Modélisation AR sur des signaux . . . . .	316
10.4.3	Analyse de raies pures dans le bruit . . . . .	318
10.4.4	Application Logistique de $[0, 1]$ . . . . .	320
10.5	Références et compléments . . . . .	322
10.6	Exercices . . . . .	322

<b>11 Applications, traitement du signal</b>	<b>327</b>
11.1 Filtrage optimal et modélisation des systèmes . . . . .	327
11.1.1 Filtrage de Wiener . . . . .	327
11.1.2 Calcul du filtre optimal de Wiener . . . . .	330
11.1.3 Le filtrage de Wiener RIF . . . . .	332
11.2 Estimateurs de moindres carrés . . . . .	333
11.2.1 Moindres carrés : résolution et interprétation . . . . .	333
11.2.2 Convergence des estimateurs de moindres carrés . . . . .	334
11.3 Prédiction linéaire et filtres en treillis . . . . .	338
11.3.1 Prédiction en treillis et algorithme de Schur . . . . .	338
11.3.2 Application au codage de la parole . . . . .	342
11.4 Algorithmes récursifs et adaptatifs . . . . .	344
11.4.1 Moindres carrés récursifs : RLS . . . . .	344
11.4.2 Gradient stochastique : LMS . . . . .	346
11.4.3 Algorithmes à pas constant : performances . . . . .	350
11.4.4 Identification RII, Modélisation ARMA . . . . .	352
11.5 Programmes, algorithmes et applications . . . . .	356
11.5.1 Algorithme de Schur, filtres en treillis . . . . .	356
11.5.2 Filtrage de Wiener . . . . .	359
11.5.3 Algorithmes adaptatifs, applications . . . . .	360
11.6 Références et compléments . . . . .	366
11.7 Exercices . . . . .	366
11.8 Thème d'étude : attracteurs RML, ELS . . . . .	372
<b>III Outils de travail</b>	<b>375</b>
<b>12 Langages SAGE, Python, Mathematica</b>	<b>377</b>
12.1 Principes et objets de base . . . . .	378
12.2 Définition de fonctions, programmation . . . . .	379
12.3 Python-SAGE : modules, classes et types . . . . .	380
12.4 Références et compléments . . . . .	381
<b>13 Corrigés des exercices</b>	<b>383</b>
1 Corrigés des exercices du chapitre 1 . . . . .	383
2 Corrigés des exercices du chapitre 2 . . . . .	390
3 Corrigés des exercices du chapitre 3 . . . . .	395
4 Corrigés des exercices du chapitre 4 . . . . .	405
5 Corrigés des exercices du chapitre 5 . . . . .	412
6 Corrigés des exercices du chapitre 6 . . . . .	419
7 Corrigés des exercices du chapitre 7 . . . . .	427
8 Corrigés des exercices du chapitre 8 . . . . .	434
9 Corrigés des exercices du chapitre 9 . . . . .	443
10 Corrigés des exercices du chapitre 10 . . . . .	454
11 Corrigés des exercices du chapitre 11 . . . . .	462
<b>Bibliographie</b>	<b>471</b>
<b>Index</b>	<b>474</b>