

Table des matières

Notations et abréviations	xiii
I Signaux déterministes	1
1 Outils mathématiques	3
1.1 Intégrale de Lebesgue	3
1.1.1 Mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}	3
1.1.2 Intégrale de Lebesgue et espaces L^p associés	4
1.1.3 Intégrales à paramètre et théorème de Fubini	5
1.2 Espace de Hilbert	6
1.2.1 Définition et propriétés	6
1.2.2 Projection orthogonale et bases hilbertiennes	8
1.2.3 Exemples de bases hilbertiennes	10
1.2.4 Application : séries de Fourier	12
1.3 Fonctions analytiques et intégration	14
1.3.1 Fonctions holomorphes	14
1.3.2 Fonctions analytiques	15
1.3.3 Intégration complexe et formule de Cauchy	17
1.3.4 Séries de Laurent et théorème des résidus	19
1.4 Programmes et algorithmes	22
1.4.1 Orthogonalisation de Gram-Schmidt	22
1.4.2 Calcul de résidus et intégration	23
1.4.3 Séries de Fourier, phénomène de Gibbs	25
1.5 Annexe : mesures et intégrale de Stieltjès	26
1.6 Références et compléments	29
1.7 Exercices	30
1.8 Thème d'étude : séries de Fourier	34
2 Systèmes différentiels et signaux	37
2.1 Système différentiel	37
2.1.1 Théorème de Cauchy-Lipschitz	37
2.2 Systèmes linéaires stationnaires	38
2.2.1 Oscillateur linéaire	38
2.2.2 Oscillateur amorti : système dissipatif	39

2.2.3	Expression générale des solutions	40
2.2.4	Points fixes d'un système différentiel linéaire	41
2.2.5	Quasi-périodicité : pendule double	42
2.3	Systèmes différentiels linéaires	43
2.3.1	Résolvante et expression des solutions	44
2.4	Systèmes dynamiques non linéaires	45
2.4.1	Points fixes d'un système autonome	46
2.4.2	Pendule non linéaire libre	46
2.4.3	Oscillateur auto-entretenu : Van der Pol	47
2.4.4	Chaos en dimension 3 : le modèle de Lorenz	49
2.5	Programmes et simulations	52
2.5.1	Résolution exacte d'équations différentielles	52
2.5.2	Résolution numérique des équations différentielles	53
2.6	Références et compléments	55
2.7	Exercices	56
2.8	Thèmes d'étude	58
2.8.1	Fonctions de Bessel	58
2.8.2	Algorithme de Putzer	61
3	Convolution et Fourier	63
3.1	Convolution sur \mathbb{R}	63
3.1.1	Définition et existence	63
3.1.2	Opérateur de convolution	64
3.1.3	Convolution et régularisation	65
3.2	Transformation de Fourier	67
3.2.1	TF sur L^1 , propriétés	67
3.2.2	Dérivation et comportement à l'infini	69
3.2.3	Inversion de la transformation de Fourier	69
3.2.4	TF sur \mathcal{S} et L^2	70
3.2.5	Relation d'incertitude (Heisenberg)	72
3.3	Transformation de Laplace sur \mathbb{R}^+	73
3.3.1	Définition, propriétés	73
3.3.2	Inversion de la transformation de Laplace	76
3.3.3	Application aux systèmes différentiels linéaires	78
3.4	Programmes et applications	78
3.4.1	Calcul symbolique de la transformation de Laplace	78
3.4.2	TF de fraction rationnelle	80
3.4.3	Transformation de Fourier, convolution	81
3.4.4	Fonctions splines cubiques	82
3.5	Références et compléments	84
3.6	Exercices	85
3.7	Thème d'étude : TL de fonctions causales	90
3.7.1	TL d'une fonction de $L^2(0, \infty)$	90
3.7.2	Réciproque du théorème (Paley-Wiener)	91

4 Distributions	93
4.1 Dualité, exemple de la masse de Dirac	94
4.1.1 Approximation de δ	94
4.1.2 Dualité, exemples	94
4.2 Distributions, opérations et propriétés	95
4.2.1 L'espace \mathcal{D}' des distributions de Schwartz	95
4.2.2 Opérations sur les distributions	97
4.2.3 Convolution des distributions	100
4.3 Espace \mathcal{S}' et transformation de Fourier	101
4.3.1 TF des distributions, propriétés	102
4.3.2 TF des distributions à support borné	103
4.3.3 Applications et propriétés de \mathcal{D}'	104
4.3.4 Compléments : TF d'une mesure bornée	107
4.4 Programmes et simulations	108
4.4.1 Noyau de Fejer et peigne de Dirac	108
4.4.2 Splines, TF, équation d'échelle	109
4.5 Références et compléments	111
4.6 Exercices	111
5 Signaux et systèmes à temps discret	115
5.1 Échantillonnage, théorème de Shannon	115
5.1.1 Échantillonnage, peigne de Dirac et TF	116
5.1.2 Reconstruction du signal, formule de Shannon	117
5.1.3 Signaux à bande limitée et propriétés	120
5.2 Convolution sur \mathbb{Z}	122
5.2.1 Convolution discrète et filtres numériques	122
5.2.2 Filtres réalisables : équations aux Différences Finies	124
5.3 Transformée en \mathbb{Z} et systèmes numériques	127
5.3.1 Définition et propriétés	127
5.3.2 Inversion de la TZ	129
5.4 Transformation de Fourier sur \mathbb{Z} et TFD	131
5.4.1 TF des suites numériques	131
5.4.2 Vers la TFD : horizon d'observation fini	133
5.4.3 La TFD : échantillonnage en fréquence	134
5.5 Transformée de Fourier Rapide (FFT)	135
5.5.1 Principe de la FFT et complexité	135
5.5.2 Mise en œuvre, organisation des données	136
5.6 Filtrage numérique, exemples	137
5.6.1 Propriétés des filtres numériques	138
5.6.2 Synthèse de filtres à partir du spectre	141
5.7 Programmes et simulations	142
5.7.1 Repliement spectral pour la Lorentzienne	142
5.7.2 TZ, EDF, convolution, filtrage (symbolique)	144
5.7.3 Calcul de la transformation de Fourier par FFT	146
5.7.4 TZ, EDF, convolution, filtrage (numérique)	147
5.8 Références et compléments	148

5.9	Exercices	148
5.10	Thème d'étude : Paley-Wiener BL_σ^2	152
6	Moyennes, corrélation, densité spectrale	155
6.1	Fonctions de corrélation et DSP	155
6.1.1	Définition et propriétés	156
6.1.2	Exemples de signaux, corrélation et densité spectrale	157
6.2	Fonctions de type positif, mesure spectrale	161
6.2.1	Analyse spectrale à horizon fini T	161
6.2.2	Mesure spectrale : théorème de Bochner	162
6.2.3	Filtrage, corrélation et DSP	165
6.3	Moyennes et signaux stationnaires	166
6.3.1	Moyennes temporelles	166
6.3.2	Fonctions de carré moyennable	168
6.3.3	Fonctions stationnaires	169
6.4	Application aux fonctions presque périodiques	171
6.4.1	Propriétés élémentaires des fonctions de \mathcal{Q}	171
6.4.2	Série de Fourier-Bohr de $x \in \mathcal{Q}$	171
6.4.3	Convergence de la série de Fourier-Bohr dans \mathcal{M}_2	172
6.4.4	Corrélation et spectre des fonctions de \mathcal{Q}	173
6.5	Fonctions pseudo-aléatoires	174
6.5.1	Définition	174
6.5.2	Construction de fonctions pseudo-aléatoires	174
6.5.3	Trajectoires de systèmes chaotiques	176
6.6	Programmes et applications	179
6.6.1	Calcul symbolique de corrélations et DSP	179
6.6.2	Calcul numérique de corrélations et DSP, applications	182
6.7	Références et compléments	187
6.8	Exercices	187
6.9	Thème d'étude : presque-périodicité de Bohr	191
II	Signaux aléatoires	193
7	Outils de probabilité	195
7.1	Modèle probabiliste	195
7.1.1	Tribu d'évènements sur Ω	195
7.1.2	Indépendance et conditionnement	196
7.2	Variables et vecteurs aléatoires	197
7.2.1	Définition, tribu et loi	197
7.2.2	Espérance Mathématique	198
7.2.3	Indépendance des variables aléatoires	201
7.2.4	Addition de variables aléatoires indépendantes	202
7.3	Lois de probabilité classiques	203
7.4	Vecteurs gaussiens	206
7.5	Loi des grands nombres et statistique	207

7.5.1	Estimateur de la moyenne	208
7.5.2	Le Théorème de limite-centrale	209
7.5.3	Loi forte des grands nombres	210
7.6	Programmes et simulations	212
7.6.1	Outils de statistique descriptive	212
7.6.2	Génération de lois	212
7.6.3	Statistique : test du Khi-2, intervalles de confiance	215
7.7	Compléments, statistique	219
7.7.1	Outils pour la loi des grands nombres	219
7.7.2	Différentes convergences de variables aléatoires	219
7.7.3	Estimateurs statistiques, propriétés	220
7.8	Références et compléments	221
7.9	Exercices	222
7.10	Thème d'étude : modèle gaussien	225
8	Processus aléatoires et signaux	229
8.1	Définition, loi	229
8.1.1	Exemples simples	230
8.1.2	Loi d'un processus aléatoire	232
8.1.3	Moments d'un processus aléatoire	233
8.1.4	Stationnarité d'un processus	233
8.2	Différentes classes de processus	234
8.2.1	Processus indépendant, Bruit blanc	234
8.2.2	Processus gaussiens	235
8.2.3	Processus à accroissements indépendants	235
8.2.4	Processus markoviens	236
8.3	Processus de Wiener-Lévy	237
8.3.1	Définition et construction	237
8.3.2	Application : Bruit blanc à temps continu	239
8.3.3	Intégrale de Wiener, filtrage du bruit blanc	240
8.4	Processus de Poisson	242
8.4.1	Définition et construction	242
8.4.2	Propriétés du Processus de Poisson	242
8.5	Références et compléments	244
8.6	Exercices	245
8.7	Thème d'étude : chaînes de Markov	248
9	Signaux aléatoires stationnaires	251
9.1	Corrélation, DSP et filtrage	252
9.1.1	Propriétés du second ordre	252
9.1.2	Intercorrélation, densité interspectrale	253
9.1.3	Filtrage des processus stationnaires	255
9.1.4	Formule des interférences	256
9.2	Modèles de signaux stationnaires	258
9.2.1	Signaux quasi-périodiques	258
9.2.2	Modèle AR	260

9.2.3	Modèle MA	261
9.2.4	Modèle ARMA	263
9.3	Estimation en m.q. dans $L^2(\Omega)$	263
9.3.1	Espérance conditionnelle	264
9.3.2	Estimation linéaire en moyenne quadratique	264
9.4	Prédiction linéaire et modélisation des signaux	266
9.4.1	Prédiction et modélisation AR(p)	266
9.4.2	Prédiction à passé infini, innovation	269
9.4.3	Décomposition de Wold	270
9.4.4	Factorisation spectrale, Paley-Wiener	272
9.5	Programmes et simulations	274
9.5.1	Algorithmes de calcul	274
9.5.2	Application : modélisation AR, factorisation spectrale	276
9.6	Références et compléments	280
9.7	Exercices	280
9.8	Thèmes d'étude	286
9.8.1	Prédiction linéaire itérative, Algorithme de Levinson	286
9.8.2	Condition de Paley-Wiener	286
10	Estimation et ergodisme des processus	289
10.1	Estimation des moyennes et corrélations	289
10.1.1	Estimation de la moyenne	290
10.1.2	Estimation de la corrélation	291
10.1.3	Compléments sur la convergence p.s.	293
10.1.4	Corrélogramme, compromis biais-variance	294
10.2	Analyse spectrale	294
10.2.1	Corrélogrammes et leur TF	297
10.2.2	Périodogramme, Théorème de Wiener-Kintchine	298
10.2.3	Convergence étroite du périodogramme	300
10.2.4	Mise en œuvre pratique : moyennage, fenêtrage	301
10.3	Théorie ergodique et applications	305
10.3.1	Système dynamique et mesure invariante	305
10.3.2	Application aux processus aléatoires SSF	307
10.3.3	Application aux systèmes dynamiques sur $E = [0, 1]$	309
10.4	Programmes, algorithmes, simulations	312
10.4.1	Corrélation et applications	313
10.4.2	Modélisation AR sur des signaux	316
10.4.3	Analyse de raies pures dans le bruit	318
10.4.4	Application Logistique de $[0, 1]$	320
10.5	Références et compléments	322
10.6	Exercices	322

11 Applications, traitement du signal	327
11.1 Filtrage optimal et modélisation des systèmes	327
11.1.1 Filtrage de Wiener	327
11.1.2 Calcul du filtre optimal de Wiener	330
11.1.3 Le filtrage de Wiener RIF	332
11.2 Estimateurs de moindres carrés	333
11.2.1 Moindres carrés : résolution et interprétation	333
11.2.2 Convergence des estimateurs de moindres carrés	334
11.3 Prédiction linéaire et filtres en treillis	338
11.3.1 Prédiction en treillis et algorithme de Schur	338
11.3.2 Application au codage de la parole	342
11.4 Algorithmes récursifs et adaptatifs	344
11.4.1 Moindres carrés récursifs : RLS	344
11.4.2 Gradient stochastique : LMS	346
11.4.3 Algorithmes à pas constant : performances	350
11.4.4 Identification RII, Modélisation ARMA	352
11.5 Programmes, algorithmes et applications	356
11.5.1 Algorithme de Schur, filtres en treillis	356
11.5.2 Filtrage de Wiener	359
11.5.3 Algorithmes adaptatifs, applications	360
11.6 Références et compléments	366
11.7 Exercices	366
11.8 Thème d'étude : attracteurs RML, ELS	372
III Outils de travail	375
12 Langages SAGE, Python, Mathematica	377
12.1 Principes et objets de base	378
12.2 Définition de fonctions, programmation	379
12.3 Python-SAGE : modules, classes et types	380
12.4 Références et compléments	381
13 Corrigés des exercices	383
1 Corrigés des exercices du chapitre 1	383
2 Corrigés des exercices du chapitre 2	390
3 Corrigés des exercices du chapitre 3	395
4 Corrigés des exercices du chapitre 4	405
5 Corrigés des exercices du chapitre 5	412
6 Corrigés des exercices du chapitre 6	419
7 Corrigés des exercices du chapitre 7	427
8 Corrigés des exercices du chapitre 8	434
9 Corrigés des exercices du chapitre 9	443
10 Corrigés des exercices du chapitre 10	454
11 Corrigés des exercices du chapitre 11	462
Bibliographie	471
Index	474