Chapitre 1

Outils mathématiques

On donne ici un résumé des définitions, outils et théorèmes mathématiques, utilisés comme référence pour la suite de l'ouvrage. Ces outils doivent pouvoir être utilisés comme base, sans entrer dans le détail de leur justification mathématique. Les références pour ces constructions détaillées sont données en fin de chapitre.

1.1 Intégrale de Lebesgue

1.1.1 Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$

Il s'agit d'une fonction d'ensemble, représentant la *longueur* d'une partie de la droite réelle. Elle est définie sur les intervalles $I = (a, b)$ par $\lambda(I) = b - a$ (la longueur), puis étendue à la *tribu engendrée*[1] par ces intervalles, appelée tribu des boréliens. Elle est σ*-additive*, c'est-à-dire additive pour une union dénombrable disjointe de parties de $\mathbb{R}$.

Définition 1.1. *La* ***tribu des boréliens*** $\mathcal{B}$ *est la plus petite famille de parties de* $\mathbb{R}$ *contenant les intervalles, et stable par complémentaire et union dénombrable.*

— *La* ***mesure de Lebesgue*** $\lambda = \mathrm{d}x$ *est l'unique fonction* $\lambda : \mathcal{B} \to \mathbb{R}^+$, σ*-additive, et égale pour les intervalles à leur longueur.*

— *Un ensemble* de mesure nulle *(ou négligeable) est une partie* $A \subset \mathbb{R}$ *qui peut être recouverte par une union disjointe d'intervalles de longueur totale inférieure à tout réel positif* ε.

— *On dira qu'une propriété (P) est vraie* ***presque partout*** *(p.p.) si elle est vraie pour tout réel* x *hors d'un ensemble négligeable* N.

Exemples. Tout ensemble fini ou dénombrable est de mesure nulle (par exemple l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels). Mais il existe des ensembles non dénombrables et de mesure nulle : un exemple classique est l'ensemble triadique (fractal) de Cantor $\mathbb{K}_3$, ensemble des réels dont l'écriture en base 3 ne contient pas de 1 (voir Exercice E.1.1).

1. Pour tout ensemble E, et toute famille $\mathcal{F}$ de parties de E, la tribu engendrée $\mathcal{T}(\mathcal{F})$ est la plus petite famille de parties, contenant $\mathcal{F}$ et $\varnothing$, et stable par complémentaire et union dénombrable.

Dans les intégrales, on notera dx cette mesure de Lebesgue (ou son élément différentiel). Voir l'Annexe 1.5 pour des compléments sur la notion de mesure et l'intégrale associée.

1.1.2 Intégrale de Lebesgue et espaces L^p associés

Une fonction réelle f est *mesurable* si $\forall A \in \mathcal{B},\ f^{-1}(A) \in \mathcal{B}$. Elle est étagée si $f = \sum_1^n a_i \mathbb{1}_{A_i}$ pour $A_i \in \mathcal{B}$, et on définit alors son intégrale par

$$\int f \,\mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x = \sum_1^n a_i \lambda(A_i) \leq +\infty.$$

Pour f mesurable et positive quelconque, on pose

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x = \sup_{\varphi \leq f} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\mathrm{d}x \leq \infty \quad \text{avec } \varphi \geq 0 \text{ étagée.} \tag{1.1}$$

Les propriétés de linéarité et de monotonie de l'intégrale sont immédiates, et on en déduit aussi le théorème suivant (voir Exercice E.1.2).

Théorème 1.2 (Convergence monotone)**.** *Si la suite de fonctions positives $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante de limite f, alors $\int f \,\mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\lambda$.*

Pour une fonction mesurable f quelconque, on se ramène au cas positif en décomposant $f = f^+ - f^-$, avec les parties positive et négative de f : $f^+ = \sup(f, 0)$, et $f^- = \sup(-f, 0)$. La fonction f est dite *intégrable (au sens de Lebesgue)* si

$$\int f^+ \,\mathrm{d}\lambda = i^+ < \infty, \quad \int f^- \,\mathrm{d}\lambda = i^- < \infty, \quad \text{et on pose} \quad \int f \,\mathrm{d}\lambda = i^+ - i^-.$$

En pratique, toute fonction f constructible est mesurable et elle sera intégrable ssi $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\mathrm{d}x < \infty$. On étend ces définitions aux fonctions à valeurs complexes en posant

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{Re}\, f(x)\mathrm{d}x + \mathrm{i} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{Im}\, f(x)\mathrm{d}x.$$

Définition 1.3. *On note $\mathcal{L}^p$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mesurables telles que $\|f\|_p = (\int |f(x)|^p \mathrm{d}x)^{1/p} < \infty$. C'est une pseudo-norme ($\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow f = 0$ p.p.). On obtient une vraie norme sur l'espace L^p des classes d'équivalences de fonctions, modulo l'égalité p.p. (on confond deux fonctions égales p.p.).*

On établit les propriétés suivantes des espaces normés L^p (voir [Rud66]).

Théorème 1.4. *L^p est un espace normé complet pour $\|\cdot\|_p$, et l'espace des fonctions continues à support compact $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ est dense dans L^p. Il en va de même pour l'espace $\mathcal{E}_0$ des fonctions en escalier à support borné.*

Les espaces utilisés pour les signaux seront L^1 (fonctions intégrables) et L^2 (fonctions de carré intégrable, représentant les signaux d'énergie finie).

On notera que l'intégrabilité au sens de Lebesgue est une intégrabilité en valeur absolue, et ne concerne donc pas les intégrales impropres semi-convergentes.

Définition 1.5. *On note L^1_{loc} l'espace des fonctions mesurables, intégrables sur tout intervalle borné $I = [a, b]$. Une fonction $f \in L^1_{loc}$ sera dite* semi-intégrable *en $+\infty$ si $\lim_{A\to\infty} \int_a^A f(x)\mathrm{d}x \equiv \int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ existe (intégrale impropre semi-convergente).*

Exemple. Les fonctions $\sin(x)/x^\alpha$ sont semi-intégrables sur $\mathbb{R}^+$ pour $\alpha \in]0, 1]$. L'intégrabilité locale est claire par continuité, et la limite à l'infini s'établit en intégrant par parties : on a

$$\left|\int_u^v \frac{\sin(x)}{x^\alpha}\mathrm{d}x\right| \leq \frac{4}{u^\alpha} \to 0 \quad \text{si} \quad u, v \to \infty.$$

Par contre elles ne sont pas absolument intégrables car

$$\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{|\sin(x)|}{x^\alpha}\mathrm{d}x > \frac{1}{n^\alpha}\int_0^\pi |\sin(x)|\mathrm{d}x,$$

qui est le terme d'une série divergente.

1.1.3 Intégrales à paramètre et théorème de Fubini

On sera amené à considérer soit des suites de fonctions $f_n \in L^1$, soit des familles paramétrées de fonctions intégrables $f(x, .) \in L^1$. Les théorèmes de Lebesgue permettent de traiter les problèmes de passage à la limite, ou de continuité, dérivabilité sous l'intégrale.

Théorème 1.6 (Convergence dominée)**.** *S'il existe une fonction $\varphi \in L^1$ telle que $|f_n| \leq \varphi$, et si $f_n \to f$ p.p. lorsque $n \to \infty$, alors on a*

$$f \in L^1 \quad \textit{et} \qquad \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\mathrm{d}x.$$

Exemples. 1) Pour $f_n(x) = n\mathbb{1}_{[0,1/n]}(x)$ le théorème ne s'applique pas, car il n'y a pas de fonction majorante intégrable. Et en effet on a $f_n \to f = 0$ p.p. , mais $\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\mathrm{d}x = 1$ ne converge pas vers $\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x = 0$.
2) La suite croissante

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-2x}\mathbb{1}_{[0,n]}(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x) = \mathrm{e}^{-x}U(x),$$

donc le théorème s'applique et $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = 1$.

Théorème 1.7 (Intégrale à paramètre)**.** *Soit $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle. On suppose que pour tout $x \in I$, la fonction $f(x, .) \in L^1$.*

i) ***Continuité :*** *Si pour presque tout $t \in \mathbb{R}$ la fonction $f(., t)$ est continue, et si*

$$\exists g \in L^1\ \forall x \in I,\ |f(x, t)| < |g(t)| \qquad \textit{(Domination)}$$

alors $F(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x, t)\mathrm{d}t$ est continue sur I.

ii) ***Dérivabilité :*** *Si pour tout $t \in \mathbb{R}$ la dérivée $\frac{\partial}{\partial x}f(x, t)$ existe, et si*

$$\exists h \in L^1\ \forall x \in I,\ \left|\frac{\partial}{\partial x}f(x, t)\right| \leq h(t),$$

alors $F(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x, t)\mathrm{d}t$ est dérivable sur I et $F'(x) = \int_{\mathbb{R}} f'_x(x, t)\mathrm{d}t$.

Exemple. La fonction Gamma est définie, pour $x > 0$ par l'intégrale convergente $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$. La fonction $x \mapsto t^{x-1} = \mathrm{e}^{(x-1)\ln(t)}$ est C^∞ de dérivée n -ième $(\ln t)^n t^{x-1}$. On peut appliquer le théorème de dérivation sur tout intervalle $0 < a < b$ en utilisant la fonction majorante $h(t) = t^m |\ln t|^n \mathrm{e}^{-t}$ avec $m = a - 1$ si $t < 1$ et $m = b - 1$ si $t > 1$. Cette fonction est intégrable, donc on en déduit que Γ est C^∞ sur $\mathbb{R}^+$, et $\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^\infty \ln(t)^n t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$.

Concernant enfin l'inversion des signes d'intégration dans une intégrale double (ou série double, ou série d'intégrales), l'outil fondamental est le théorème de Fubini : on le donne ici pour l'intégrale sur $\mathbb{R}^2$ de fonctions mesurables positives ou intégrables.

Théorème 1.8 (Fubini)**.** *Soit une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mesurable (pour la tribu borélienne de $\mathbb{R}^2$ engendrée par les rectangles).*

i) Si $f \geq 0$, on a l'égalité (les intégrales sont sur $\mathbb{R}$)

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int \left(\int f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int \left(\int f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \leq \infty.$$

ii) Si f est intégrable : $\iint_{\mathbb{R}^2} |f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y < +\infty$, les trois intégrales ci-dessus sont finies et égales.

Exemple. On applique Fubini à l'intégrale double $I = \iint_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. On obtient $I = (\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x)^2 < \infty$. Puis en calculant l'intégrale double en coordonnées polaires, on obtient $I = \int_0^\infty r\mathrm{e}^{-r^2}\mathrm{d}r \cdot \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta = \pi$ d'où on déduit

$$\text{Intégrale de Gauss} \qquad \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-kx^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{k}} \quad \text{pour} \quad k > 0 \tag{1.2}$$

1.2 Espace de Hilbert

Les signaux qu'on veut représenter et traiter sont des fonctions (à temps continu ou à temps discret) et appartiennent donc à des espaces vectoriels de dimension infinie. Il s'agit ici d'étendre à ces espaces les résultats de géométrie élémentaire liés à la notion de produit scalaire. Ce modèle est à la fois extrêmement simple, et très général : on le retrouvera aussi bien sur les signaux analogiques ou numériques, déterministes ou aléatoires.

1.2.1 Définition et propriétés

Un espace vectoriel H sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, muni d'un produit scalaire $< x, y >$ est dit *préhilbertien*. Il est muni de la norme [2] quadratique $\|x\| = \sqrt{< x, x >}$.

Définition 1.9. *L'espace vectoriel $(H, < ., . >)$ est un **espace de Hilbert** s'il est* complet [3] *pour la norme quadratique associée.*

2. Elle est souvent notée $\|x\|_2$ pour la distinguer d'autres normes fonctionnelles utilisées en parallèle. Dans cette section elle seule est utilisée, donc l'indice sera omis.

3. C'est-à-dire que toute suite de Cauchy (vérifiant $\|x_p - x_q\| \xrightarrow{p,q\to\infty} 0$) dans H possède une limite $x \in H$.

Exemples utiles en signal

1) $L^2_w([a,b])$, espace des classes de fonctions de $[a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, de carré intégrable (au sens de Lebesgue) pour le poids $w(x) > 0$: caractérisées par $\int_a^b |f(t)|^2 w(t)\mathrm{d}t < \infty$, et on pose

$$< f, g >= \int_a^b f(t)g(t)^* w(t)\mathrm{d}t. \tag{1.3}$$

Les principaux utilisés seront l'espace des signaux d'énergie finie $L^2 \equiv L^2(\mathbb{R})$, et ceux $L^2(T) \equiv L^2([0,T])$ servant à représenter les signaux T-périodiques d'énergie finie sur une période.

2) Pour les signaux numériques (à temps discret), on utilisera $\ell^2(\mathbb{Z})$, espace des suites complexes de carré sommable, caractérisées par $\sum_{-\infty}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$ (énergie finie). On pose alors

$$< x, y >= \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n y_n^*. \tag{1.4}$$

Dans ces espaces, l'outil fondamental pour la représentation des signaux est la décomposition sur une *base hilbertienne*, qui joue ici le même rôle que les bases orthogonales en dimension finie.

Définition 1.10. *Un **système orthogonal** de H est une famille $B = \{e_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de H orthogonaux entre eux : $< e_i, e_j >= \|e_i\|^2 \delta_{i,j}$. On a alors*

$$\Big\| \sum_{k=1}^N a_k e_k \Big\|^2 = \sum_{k=1}^N |a_k|^2 \|e_k\|^2, \tag{1.5}$$

et la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ converge dans H ssi $\sum_{n>0} |a_n|^2 \|e_n\|^2 < \infty$.
Le sous-espace de Hilbert engendré par B est la fermeture topologique *de l'espace vectoriel $V = \mathrm{Vect}(B)$. On le notera*

$$\mathrm{hilb}(B) \equiv \overline{V} = \{x \in H |\ \exists \varphi_n \in V \quad \lim_{n\to\infty} \|x - \varphi_n\| = 0\}.$$

Le procédé itératif de Gram-Schmidt permet de construire par récurrence, à partir d'une suite libre $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ finie ou infinie, un système orthonormé $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ compatible, c'est-à-dire tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad V_n = \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_n) = E_n = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n).$$

La construction est définie à un coefficient de module 1 près sur chaque vecteur, et elle est unique si on impose la contrainte $< v_n, e_n >\in \mathbb{R}^+$ pour tout n.

Proposition 1.11 (Orthonormalisation de Gram-Schmidt)**.** *Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite libre de H. L'unique système orthonormé $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifiant les contraintes*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad V_n = E_n, \qquad < v_n, e_n >\in \mathbb{R}^+$$

est défini par la récurrence suivante :

i) $e_1 = v_1/\|v_1\|$

ii) $u_{n+1} = v_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} < v_{n+1}, e_k > e_k$

iii) $e_{n+1} = u_{n+1}/\|u_{n+1}\|$

Propriétés utiles sur l'espace de Hilbert

1. Inégalité de Schwarz : $| < x, y > | \leq \|x\| \; \|y\|$.
2. Théorème de Pythagore : Si $x \perp y$, on a $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.
3. Théorème de la médiane : $\|x\|^2 + \|y\|^2 = \frac{1}{2}(\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2)$.
4. Le produit scalaire est continu pour sa norme.
5. L'espace H est *auto-dual* : toute forme linéaire continue $f : H \to \mathbb{C}$ est u type $f(x) =< a, x >$ pour un $a \in H$.
6. Pour toute partie $A \subset H$, l'orthogonal $A^\perp = \{x \in H | \forall y \in A \; x \perp y\}$ est un sous-espace de Hilbert.

Voir l'Exercice E.1.7 pour la preuve.

1.2.2 Projection orthogonale et bases hilbertiennes

La méthode fondamentale d'approximation dans l'espace de Hilbert consiste à chercher dans un sous-espace vectoriel fermé $V \subset H$ l'élément le plus proche d'un élément quelconque $x \in H$. On parlera de *meilleure approximation en norme quadratique.*

Théorème 1.12. *La meilleure approximation (pour la norme quadratique) de $x \in H$ dans l'espace vectoriel fermé V existe et est unique. Elle est donnée par la projection orthogonale $\hat{x} = p_V(x)$ et caractérisée par les deux propriétés :*
i) $p_V(x) \in V$
ii) $x - \hat{x} \perp V$
et on a donc l'équivalence

$$\hat{x} = \operatorname{Arg}\min_{y \in V} \|x - y\| \qquad \Longleftrightarrow \qquad \hat{x} = p_V(x). \tag{1.6}$$

Démonstration. L'existence va se montrer par construction explicite ci-après. L'unicité vient d'un calcul de géométrie élémentaire. Supposons qu'on ait deux solutions y_1, y_2, alors on a $\|x - y_1\| = \|x - y_2\| = d(x, V)$, le théorème de la médiane appliqué dans le triangle isocèle $[x, y_1, y_2]$ donne pour le milieu $m = \frac{y_1+y_2}{2}$ la distance $\|x - m\|^2 = d^2 - 2\|y_1 - y_2\|^2$, ce qui prouve que $y_1 = y_2$. Le fait que la projection orthogonale, si elle existe, minimise la distance résulte du théorème de Pythagore : pour tout $y \in V$, on a par orthogonalité $\|x - y\|^2 = \|x - \hat{x}\|^2 + \|y - \hat{x}\|^2$. $\square$

Calcul de la projection orthogonale : V de dimension finie

On suppose ici que l'espace V est de dimension finie, donné par une base quelconque.

Théorème 1.13. *Si $V = \mathrm{Vect}\{v_1, \ldots, v_N\}$ (base quelconque), et $x \in H$, la projection est $p_V(x) = \sum_{k=1}^N a_k v_k$ et le vecteur des coefficients $a = (a_1, \ldots, a_N)^T$ est solution du système linéaire associé à la **matrice de Gram** de V :*

$$Ga = b \quad avec \quad G_{i,j} =< v_i, v_j > \quad 1 \leq i, j \leq N. \tag{1.7}$$

Le second membre est $b = (< x, v_1 >, \ldots, < x, v_N >)^T$.
L'erreur quadratique minimale est

$$\|x - p_V(x)\|^2 = \|x\|^2 - a^* b. \tag{1.8}$$

Démonstration. La condition $x - p_V(x) \perp v_i$ donne $\sum_{k=1}^N a_k < e_i, e_k >=< x, e_i >$ pour $i = 1 \cdots N$. Ces équations se regroupent vectoriellement sous la forme indiquée $Ga = b$. La matrice G est inversible car les v_k sont libres, il y a donc une solution unique a. Comme $x - p_V(x) \perp p_V(x)$, le théorème de Pythagore et le calcul du produit scalaire dans la base V donnent

$$\|x - p_V(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|p_V(x)\|^2, \qquad \|p_V(x)\|^2 = a^* Ga = a^* b.$$

□

Calcul de la projection orthogonale : V de dimension infinie

On suppose maintenant que $V_0 = \mathrm{Vect}\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ (base quelconque). On sait construire par Gram-Schmidt un système orthonormé compatible $\mathbf{e} = \{\mathbf{e_k}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{N}}$. On note $V = \overline{V_0}$ l'espace de Hilbert engendré, fermeture topologique de V_0.

Théorème 1.14. *Pour $x \in H$, on a*

$$p_V(x) = \sum_{n=0}^{\infty} < x, e_n > e_n, \tag{1.9}$$

*la série converge en m.q. et on a l'**inégalité de Bessel***

$$\|x - p_V(x)\|^2 = \|x\|^2 - \sum_0^{\infty} | < x, e_n > |^2 \geq 0. \tag{1.10}$$

Démonstration. On montre d'abord qu'une série $\sum_0^\infty a_k e_k$ converge dans H ssi $\sum_0^\infty |a_k|^2 < +\infty$. Ceci résulte du critère de Cauchy appliqué aux restes de la série : on a $\| \sum_p^q a_k e_k\|^2 = \sum_p^q |a_k|^2$ qui est le reste de la série numérique des $|a_k|^2$, ce qui prouve le résultat par le critère de Cauchy dans $\mathbb{R}$. L'application du théorème 1.13 à l'espace $V_N = \mathrm{Vect}\{e_0, .., e_N\}$ dont la matrice de Gram est l'identité, donne $p_N(x) = \sum_0^N < x, e_k > e_k$ et l'inégalité $\|p_N(x)\|^2 = \sum_{k=0}^N | < x, e_k > |^2 \leq \|x\|^2$. Cette majoration valable pour tout entier N montre que

$$\sum_0^\infty | < x, e_k > |^2 \leq \|x\|^2 \quad \Rightarrow \quad \exists\, \hat{x} \in V : \quad \sum_{k=0}^\infty < x, e_k > e_k \xrightarrow{m.q.} \hat{x}.$$

Enfin, par orthonormalité et continuité du produit scalaire (qui se calcule donc terme à terme dans la série de $\hat{x}$) on vérifie que $x - \hat{x} \perp e_j$ pour tout j, ce qui prouve que $\hat{x} = p_V(x)$. L'erreur quadratique se calcule par passage à la limite quand $N \to \infty$

$$\|x - \hat{x}\|^2 = \|x\|^2 - \|\sum_{k=0}^\infty < x, e_k > e_k\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=0}^\infty | < x, e_k > |^2 \geq 0.$$

□

Application : caractérisation d'une base hilbertienne de H

Définition 1.15 (Base hilbertienne)**.** *Un système orthogonal* $\mathbf{e} = \{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *est une base hilbertienne de* H *si l'espace de Hilbert engendré* $V = \mathrm{hilb}(\mathbf{e})$ *est égal à* H*.*

Ceci équivaut donc à dire que pour tout $x \in H$, on a $p_V(x) = x$.

Théorème 1.16. *Pour un système orthonormé* $\mathbf{e}$*, il est équivalent de dire :*

i) $\mathbf{e}$ *est une base hilbertienne de* H*.*

ii) $\forall x \in H \quad x = \sum_0^\infty < x, e_k > e_k$.

iii) $\forall x \in H \quad \|x\|^2 = \sum_0^\infty | < x, e_k > |^2$ ***Bessel-Parseval****.*

iv) L'orthogonal de $\mathbf{e}$ *est réduit à* $\{0\}$*.*

Démonstration. Les points i) à iii) découlent directement du Théorème 1.14, et entraînent évidemment iv). Et si on a iv), alors pour $x \in H$ on a $x - p_V(x) \perp \mathbf{e}$ donc la propriété $x = p_V(x)$. □

1.2.3 Exemples de bases hilbertiennes

Base canonique de $\ell^2(\mathbb{N})$: il est immédiat de vérifier que le système $\mathbf{e}$ défini par $e_k(n) = \delta_{k,n}$ est un système orthonormé complet de l'espace des suites de carré sommable.

Pour les espaces $L^2_w([a, b])$ sur un intervalle compact de $\mathbb{R}$, le théorème de Stone-Weierstrass (approximation uniforme de toute fonction continue sur un compact de $\mathbb{R}^n$ par une suite de polynômes) permet d'obtenir les résultats suivants (voir Exercice E.1.6).

Espace $L^2(T)$ *et séries de Fourier* : c'est l'espace des fonctions à valeurs complexes, T-périodiques, de carré intégrable sur une période, muni du produit scalaire $< f, g >= \frac{1}{T} \int_T f(t) g(t)^* \mathrm{d}t$. Une base hilbertienne (orthonormée) de cet espace est donnée par $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ avec $e_n(t) = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi n t/T}$.