Chapitre 1

Mise en équations, modélisation

Un apport essentiel de cet ouvrage est d'appuyer l'explication technique du fonctionnement de tout composant sur un modèle, et de déduire le fonctionnement d'un système électronique sur la mise en équations de ses composants, donc de leurs modèles, en interaction. Une notation claire et unifiée est indispensable pour établir sans ambiguïté ni incohérence ces équations. L'objet de ce chapitre est de présenter ce formalisme en l'illustrant sur des exemples.

1 Systèmes d'équations et d'inéquations

1.1 Bilan des inconnues et des équations

Dans un système électronique, les courants et les tensions inter composants sont *a priori* inconnues. La mise en équations du système consiste à établir l'ensemble des relations entre ces tensions et courants : c'est ce qu'on appelle le *bilan des équations* du système. Dans le cas de systèmes électroniques simples, ce bilan peut être trivial à obtenir. Mais, pour un circuit aux nombreux composants ou aux composants complexes, il est difficile d'établir le bilan de ses équations, et de le garantir *complet*, sauf à procéder avec rigueur.

Ainsi, en anticipant sur les sections suivantes, le comportement d'un *dipôle* est défini par une équation, et présente deux inconnues (courant qui le traverse, tension à ses bornes). On a donc un déficit d'une équation par rapport au nombre d'inconnues pour un dipôle. Le comportement d'un *quadripôle* est défini par deux équations, et présente quatre inconnues (courant et tension à l'entrée, courant et tension à la sortie). On a donc un déficit de deux équations par rapport au nombre d'inconnues pour un quadripôle. Pour un circuit fermé, on a autant d'équations que d'inconnues.

Comment déterminer les inconnues ? En principe, il faut nommer les courants dans toutes les branches, et les tensions de tous les nœuds. Dès que le montage à étudier n'est plus trivial, faire le bilan des inconnues et des équations est la seule façon pour être sûr de ne pas oublier des inconnues ou des équations.

1.2 Un exemple simple

On considère le problème élémentaire suivant posé par le système électronique de la figure 1.1 : *quel est le courant qui traverse une résistance R alimentée par une tension E ?*

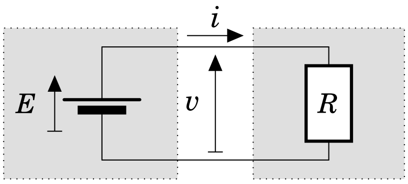


Figure 1.1 *– Exemple simple illustrant la mise en équation*

On distingue plusieurs types d'éléments qui contribuent à formaliser le fonctionnement de ce système électronique :

– les *inconnues*, toujours écrites en minuscules : ici v et i ;
– les *paramètres*, toujours écrits en majuscules : ici E et R ;
– les *équations*, qui relient *inconnues* et *paramètres* : ici $v = E$ et $v = R\ i$.

Le bilan des équations est complet parce que pour un circuit fermé, comme c'est le cas ici, il y a autant d'inconnues que d'équations.

Dans toute la suite de cet ouvrage, on adopte une notation concise pour représenter *inconnues*, *paramètres* et *équations*. Dans le cas de notre exemple, cette notation aboutit au tableau suivant :

$$\begin{array}{c|c|l} v & E & v = E \\ i & R & v = R\ i \end{array}$$

Avec cette notation, l'écriture d'un système est divisée en trois parties, séparées par des barres verticales. À gauche – figurent les inconnues, dans un ordre quelconque. Au centre – sont listés, dans un ordre quelconque, les paramètres. À droite – les équations, elles aussi dans un ordre quelconque. Cette notation permet de cataloguer précisément tous les éléments de la description d'un système.

Par extension de langage, on appellera *système* ce tableau d'éléments. Par la suite, le terme *système* qualifiera donc aussi bien le *système électronique* lui-même que *le bilan* des éléments mathématiques qui en modélisent le fonctionnement. Lorsque la distinction sera nécessaire entre les deux, on reviendra à la terminologie initiale.

Résoudre le système signifie manipuler les équations pour exprimer les inconnues en fonction des paramètres. En détaillant cette démarche sur l'exemple, on peut commencer par éliminer l'inconnue v du système :

$$\begin{array}{c|c|l} i & \begin{array}{c} E \\ R \end{array} & E = R\ i \end{array}$$

On obtient ainsi, de manière évidente :

$$i = \frac{E}{R}$$

On établit ainsi la valeur du courant qui traverse une résistance R alimentée par une tension E.

1.3 Équations et inéquations

On suppose que le problème élémentaire de la section précédente soit maintenant contraint par une condition : *quelle est la condition pour que la puissance dissipée par la résistance ne dépasse P_{max} ?*

Il y a un paramètre supplémentaire, P_{max}, et une contrainte ; la notation adoptée pour représenter le système correspondant est la suivante :

$$\begin{array}{c|c|l} v & E & v = E \\ i & R & v = R\ i \quad \blacktriangleright \quad R\ i^2 \leqslant P_{max} \\ & P_{max} & \end{array}$$

Le symbole « ► » introduit la contrainte sous la forme d'une inéquation. Une contrainte ne change pas la solution (on a toujours $i = E/R$), mais borne sa validité. Si la contrainte n'est pas vérifiée, le bilan d'équations n'a pas de solution analytique, ce qui signifie que ces équations ne sont pas celles qui sont applicables pour représenter le fonctionnement du système électronique dans cette situation (le système électronique a toujours un fonctionnement... ne serait-ce que celui de *griller* !) Techniquement, on procède d'abord à la résolution du système d'équations, et ensuite on traduit la contrainte sous la forme d'une inéquation portant sur les paramètres du système. Ici, on obtient :

$$R\ P_{max} \geqslant E^2$$

1.4 Variation incontrôlable

On modifie maintenant le problème à résoudre sur le système électronique de la figure 1.1 : *quel est le courant qui traverse une résistance R alimentée par une tension pouvant varier entre E_{min} et E_{max} ? Quelle est la condition pour que la puissance dissipée par la résistance ne dépasse P_{max} ?*

La formulation mathématique de la variation de la tension entre E_{min} et E_{max} est d'une nature complètement différente de la contrainte de dissipation maximale P_{max}. En effet, comme détaillé dans la section précédente, la contrainte de dissipation maximale P_{max} s'exprime sous la forme d'une inéquation sur les paramètres du système, que l'on doit vérifier *a posteriori*. Par contre, la variation de la tension entre E_{min} et E_{max} est *incontrôlable*, c'est-à-dire subie : formaliser le fonctionnement du système électronique dans cette situation oblige à établir une expression de la solution qui soit valide quelle que soit la tension entre E_{min} et E_{max}. La conséquence est que, dans le cas général, la solution n'est plus unique, mais conduit à une valeur dont on ne peut établir que des bornes.

La notation particulière qui est adoptée pour exprimer cette variation bornée est : $\forall\ v\ [E_{min} \ \rightarrow\ E_{max}]$. Dans l'écriture du système, elle remplace l'équation $v = E$:

$$\begin{array}{c|c|l} & E_{min} & \\ v & E_{max} & \forall\ v\ [E_{min}\ \rightarrow\ E_{max}] \\ i & R & v = R\ i\ \ \blacktriangleright\ \ R\ i^2 \leqslant P_{max} \\ & P_{max} & \end{array}$$

Pour déterminer i, on commence par éliminer l'inconnue v :

$$\begin{array}{c|c|l} & E_{min} & \\ & E_{max} & \\ i & R & \forall\ R\ i\ [E_{min}\ \rightarrow\ E_{max}]\ \ \blacktriangleright\ \ R\ i^2 \leqslant P_{max} \\ & P_{max} & \end{array}$$

Comme E_{min} et E_{max} sont des constantes délimitant un intervalle de variation, on peut leur appliquer des opérations arithmétiques conservant homothétiquement cet intervalle [1] :

$$\begin{array}{c|c|l} & E_{min} & \\ & E_{max} & \\ i & R & \forall\ i\ \left[\dfrac{E_{min}}{R}\ \rightarrow\ \dfrac{E_{max}}{R}\right]\ \ \blacktriangleright\ \ R\ i^2 \leqslant P_{max} \\ & P_{max} & \end{array}$$

Ce résultat (intermédiaire) signifie que, avec nos hypothèses, i est susceptible de varier de manière incontrôlable entre E_{min}/R et E_{max}/R. Pour établir à quelles conditions ces valeurs de i peuvent satisfaire la condition sur P_{max}, on peut écrire :

$$\forall\ i^2\ \left[\left(\frac{E_{min}}{R}\right)^2\ \rightarrow\ \left(\frac{E_{max}}{R}\right)^2\right]$$

Puis :

$$\forall\ R\ i^2\ \left[\frac{E_{min}^2}{R}\ \rightarrow\ \frac{E_{max}^2}{R}\right]$$

Cette écriture signifie que $R\ i^2$ évolue de manière incontrôlable entre les bornes E_{min}^2/R et E_{max}^2/R. La seule possibilité pour que la contrainte $R\ i^2 \leqslant P_{max}$ soit vérifiée pour *toutes* les valeurs de l'intervalle incontrôlable est qu'elle le soit pour la borne supérieure :

$$\frac{E_{max}^2}{R} \leqslant P_{max}$$

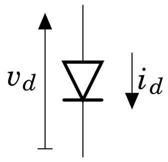
Si l'une de ces trois grandeurs est ajustable, sa borne pourra être établie en fonction de la valeur des deux autres. Si les trois sont fixées, cette condition

1. Attention, multiplier ou diviser par une quantité négative échange les bornes.

permettra d'établir si le système électronique peut fonctionner conformément à ses équations.

1.5 Domaine de validité

Pour beaucoup de composants, on ne peut exhiber une équation unique qui en modélise le fonctionnement dans toute sa plage de fonctionnement : celle-ci doit être découpée en domaines disjoints, et on établit un jeu d'équations et d'inéquations par domaine. Les équations définissent le comportement dans un domaine, et les inéquations l'appartenance au domaine. Le comportement dans un domaine est souvent appelé *mode de fonctionnement*. Un exemple typique est celui d'une diode de commutation, dont le modèle linéaire est (voir le système 4.3 page 109) :



$$\begin{array}{c|c|l} v_d & V_D & \left\{ \begin{array}{lll} \text{Diode bloquée :} & i_d = 0 & \blacktriangleright \ v_d \leqslant V_D \\ \text{Diode passante :} & v_d = V_D + R_D\ i_d & \blacktriangleright \ v_d \geqslant V_D \end{array} \right. \\ i_d & R_D & \end{array}$$

Dans cette notation, l'accolade « { » regroupe des équations qui s'excluent : ici, ces équations concernent la modélisation choisie pour une diode. On a soit $i_d = 0$ (diode bloquée), soit $v_d = V_D + R_D\ i_d$ (diode passante), mais pas les deux, sauf éventuellement en un point : c'est donc dans tous les cas un système à une équation. Le symbole ► introduit la liste des conditions qui doivent être vérifiées pour chaque équation : si on adopte $i_d = 0$, alors $v_d \leqslant V_D$ doit être vérifiée. Si c'est $v_d = V_D + R_D\ i_d$, alors $v_d \geqslant V_D$ doit être vérifiée.

L'exercice 5.2 page 119 est un exercice académique typique qui expose la méthode de résolution d'un tel système. La mise en équations aboutit au système suivant :

$$\begin{array}{c|c|l} v_d & I_0 & I_0 = i + i_d \\ i_d & R_1,\ R_2 & R_1\ i = v_d + R_2\ i_d \\ i & V_D,\ R_D & \left\{ \begin{array}{ll} i_d = 0 & \blacktriangleright \ v_d \leqslant V_D \\ v_d = V_D + R_D\ i_d & \blacktriangleright \ v_d \geqslant V_D \end{array} \right. \end{array}$$

Pour résoudre un tel système, la démarche est toujours la même : *se placer dans un mode de fonctionnement, exploiter les équations valides dans ce mode, vérifier les inéquations valides dans ce mode.*

On suppose donc par exemple que la diode est bloquée ($i_d = 0$). Le système devient donc dans ce mode :

$$\begin{array}{c|c|l} v_d & I_0 & I_0 = i + i_d \\ i_d & R_1,\ R_2 & R_1\ i = v_d + R_2\ i_d \\ i & V_D,\ R_D & i_d = 0 \quad \blacktriangleright \quad v_d \leqslant V_D \end{array}$$

La résolution conduit à l'expression des inconnues en fonction des paramètres, et à la traduction de l'inéquation en termes de contrainte sur les paramètres :

$$\begin{array}{c|c|l} v_d & I_0 & i = I_0 \\ i_d & R_1,\, R_2 & v_d = R_1\, I_0 \\ i & V_D,\, R_D & i_d = 0 \quad \blacktriangleright \quad R_1\, I_0 \leqslant V_D \end{array}$$

L'inéquation signifie que l'hypothèse $i_d = 0$ n'est justifiée que si les valeurs des paramètres vérifient $R_1\, I_0 \leqslant V_D$. Si aucune valeur numérique n'est donnée, on ne peut rien faire de plus. Si les valeurs numériques de ces paramètres sont données, alors :

- soit l'inéquation est vérifiée, on a bien la solution du problème ;
- soit l'inéquation n'est pas vérifiée, alors la solution n'est pas valide : cela signifie que l'hypothèse du mode de fonctionnement *diode bloquée* est fausse.

Si on suppose maintenant que la diode est passante ($v_d = V_D + R_D\, i_d$), on obtient le système :

$$\begin{array}{c|c|l} v_d & I_0 & I_0 = i + i_d \\ i_d & R_1,\, R_2 & R_1\, i = v_d + R_2\, i_d \\ i & V_D,\, R_D & v_d = V_D + R_D\, i_d \quad \blacktriangleright \quad v_d \geqslant V_D \end{array}$$

La résolution du système (exercice 5.2 page 119), conduit à l'inéquation $R_1\, I_0 \geqslant V_D$.

1.6 Montages comportant des amplificateurs opérationnels

La mise en équations des montages comportant des amplificateurs opérationnels peut être piégeuse, car très souvent elle consuit à ignorer les courants (d'entrée, de sortie) du montage, mais à ne formuler que les expressions des tensions. Aussi, les inconnues des courants ne sont pas cataloguées, ce qui perturbe le bilan des équations et des inconnues. Ce point est détaillé dans la section 6 page 191.

2 Dipôles

L'essentiel des systèmes électroniques se compose de circuits interconnectant des éléments à deux points de connexion avec les autres éléments, ou à quatre points de connexion ou à six points. Ces types d'éléments sont qualifiés de, respectivement, dipôles, quadripôles, hexapôles. Disposer de règles générales pour établir les équations de ces éléments facilite alors grandement l'établissement du bilan complet d'un circuit. La présente section ainsi que les suivantes présentent ces règles, en commençant par celles des dipôles.

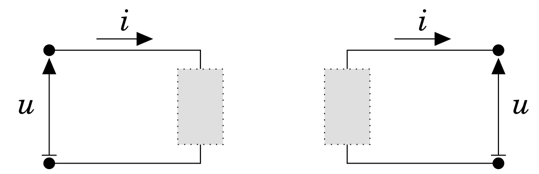
Le comportement d'un dipôle réel est caractérisé par une équation[2] de la forme $f(i,\ u) = 0$, où i est le courant à travers le dipôle, et u la tension à ses bornes.

Un dipôle réel est dit passif si il ne contient aucune source d'énergie ; il est actif dans le cas contraire. Un dipôle est dit linéaire si son équation est linéaire.

2.1 Conventions de signe du courant

Il existe deux conventions de signe du courant pour les dipôles, celle des *dipôles passifs* (figure 1.2.a), et celle des *dipôles actifs* (figure 1.2.b).

La justification physique entre ces deux conventions de signe peut être difficile à appréhender. C'est pourquoi la figure 1.3 les présente un peu différemment, en mettant en évidence les orientations relatives du courant et de la tension : opposés pour un dipôle passif, dans le même sens pour un dipôle actif. Cette figure met aussi l'accent sur un aspect qui peut paraître évident : *le courant qui entre dans un dipôle est égal au courant qui en sort*. C'est-à-dire que c'est le même courant i qui traverse les deux branches du dipôle. Ceci n'est pas une équation, c'est une propriété vérifiée par tout dipôle, qu'il soit réel ou virtuel.



(a) Dipôle passif **(b)** Dipôle actif

***Figure 1.2** – Conventions de signe du courant dans un dipôle*

(a) Dipôle passif **(b)** Dipôle actif

***Figure 1.3** – Illustration des conventions de signe du courant dans un dipôle*

La mise en équations d'un dipôle contenant plusieurs composants peut faire apparaître diverses inconnues internes, autres que la tension v et le

2. Contrairement à un dipôle virtuel, comme le norateur et le nullateur (section 2.7 page 19).

courant i. Cependant, pour un dipôle réel, quel que soit le nombre d'inconnues internes ajoutées, son bilan complet comprendra toujours une équation de moins que le nombre total d'inconnues.

L'*équation caractéristique d'un dipôle* est l'équation qui résulte de l'élimination des inconnues internes, c'est-à-dire qui ne mentionne comme inconnues que la tension v aux bornes du dipôle et le courant i qui le traverse.

2.2 Puissance dissipée, fournie par un dipôle

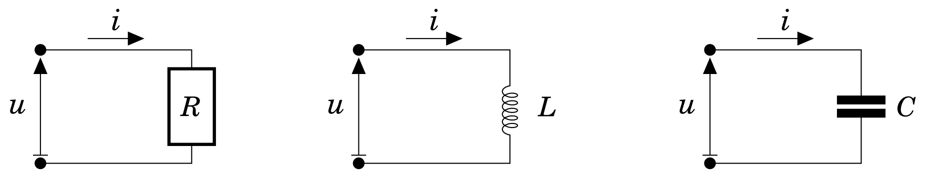
Puissance *dissipée* et puissance *fournie* sont des grandeurs de signes opposés ; le signe de leur expression dépend de la convention de signe du courant dans le dipôle (tableau 1.1).

Dipôle	Puissance dissipée	Puissance fournie
Actif	$-v\ i$	$v\ i$
Passif	$v\ i$	$-v\ i$

***Tableau 1.1** – Puissance fournie et dissipée par un dipôle*

La terminologie *dissipée* ou *fournie* n'exprime pas directement un comportement physique. C'est ainsi qu'une puissance *dissipée* négative est en fait une puissance physiquement produite par le composant.

2.3 Les dipôles linéaires passifs



(a) Résistance **(b)** Inductance **(c)** Condensateur

***Figure 1.4** – Dipôles linéaires passifs*

Les trois dipôles linéaires passifs réels sont : la résistance, l'inductance et le condensateur (figure 1.4). Les systèmes associés sont :

$$\text{Résistance :}\quad u,\ i\ \Big|\ R\ \Big|\ u = R\ i$$

$$\text{Inductance :}\quad u,\ i\ \Big|\ L\ \Big|\ u = L\ \frac{di}{dt}$$

$$\text{Condensateur :}\quad u,\ i\ \Big|\ C\ \Big|\ i = C\ \frac{du}{dt}$$