

## Table des matières

<b>Prologue autour de la mesure extérieure de Lebesgue</b>	<b>1</b>
<b>1 Autour de la mesure extérieure de Lebesgue</b>	<b>3</b>
1.1 La mesure extérieure de Lebesgue . . . . .	4
1.2 Les limites à l'additivité : la construction de Vitali . . . . .	11
1.3 Vers une additivité « restreinte » : la mesurabilité . . . . .	13
1.4 Tribus ; la tribu des boréliens . . . . .	21
1.5 Régularité . . . . .	25
1.6 Un théorème de (presque) recouvrement . . . . .	34
1.7 Le théorème de densité de Lebesgue . . . . .	40
1.8 Le théorème de dérivation de Lebesgue . . . . .	45
1.9 Commentaires . . . . .	51
1.9.1 Cantor, Jordan, Peano, Borel, Lebesgue et le « problème de la mesure » . . . . .	51
1.9.2 Carathéodory : une nouvelle définition de la mesurabilité . . . . .	62
1.9.3 Le « problème de la mesure » (suite) : la contribution « idéaliste » de Vitali . . . . .	67
1.9.4 Lusin, Sierpinski, Steinhaus et la structure des ensembles de différences . . . . .	73
1.9.5 Le théorème de densité de Lebesgue et la contribution de Vitali . . . . .	75
1.10 Exercices . . . . .	78

<b>L'intégrale, de Riemann à Kurzweil et Henstock</b>	<b>89</b>
<b>2 L'intégrale de Riemann</b>	<b>91</b>
2.1 Définitions et premières propriétés . . . . .	92
2.2 Propriétés élémentaires . . . . .	95
2.3 Le critère de Cauchy de R-intégrabilité . . . . .	100
2.4 Un théorème élémentaire de convergence . . . . .	105
2.5 Quelques caractérisations usuelles . . . . .	106
2.6 Le critère de R-intégrabilité de Lebesgue-Vitali . . . . .	114
2.7 Le théorème fondamental et la R-intégrale . . . . .	117
2.8 Intégrales indéfinies . . . . .	128
2.9 Commentaires . . . . .	135
2.9.1 L'intégrale de Cauchy . . . . .	135
2.9.2 De l'intégrale de Cauchy à l'intégrale de Riemann . . . . .	140
2.9.3 Nouveaux essais de caractérisation et contre-exemples : de Hankel à Smith . . . . .	147
2.9.4 Vers un nouveau critère d'intégrabilité : le résultat fondamental de Vitali et Lebesgue . . . . .	156
2.9.5 Le <i>Mémoire</i> de Darboux : une présentation nouvelle de l'intégrale de Riemann . . . . .	168
2.9.6 L'intégrale de Riemann et le théorème fondamental : de Cauchy à Volterra . . . . .	171
2.10 Exercices . . . . .	179
<b>3 L'intégrale de Lebesgue</b>	<b>185</b>
3.1 Fonctions mesurables : premières remarques . . . . .	186
3.2 Propriétés élémentaires des fonctions mesurables . . . . .	189
3.3 Mesurabilité et limites « presque partout » . . . . .	193
3.4 Fonctions mesurables, boréliennes ou continues . . . . .	196
3.5 Approximation des fonctions mesurables . . . . .	202
3.5.1 Approximation par des fonctions continues . . . . .	202
3.5.2 Approximation par des fonctions étagées . . . . .	207
3.6 Intégrales de fonctions étagées . . . . .	210
3.7 Fonctions intégrables au sens de Lebesgue . . . . .	214
3.8 Le théorème de convergence monotone . . . . .	221
3.9 D'autres théorèmes de convergence . . . . .	226
3.10 Lien avec l'intégrale de Riemann . . . . .	229
3.11 Un premier théorème fondamental . . . . .	233
3.12 Une formule de changement de variable . . . . .	235
3.13 Intégrales indéfinies : premières propriétés . . . . .	237
3.14 Dérivabilité des intégrales indéfinies . . . . .	243
3.15 Une caractérisation des intégrales indéfinies . . . . .	248
3.16 Retour au théorème fondamental . . . . .	251
3.17 Commentaires . . . . .	253
3.17.1 D'une définition « géométrique » de l'intégrale de Riemann à la définition « géométrique » de l'intégrale de Lebesgue	253

3.17.2	Des fonctions de Baire aux fonctions mesurables : l'extension du domaine de l'analyse . . . . .	257
3.17.3	Les théorèmes de Severini-Egoroff et de Lusin . . . . .	260
3.17.4	Les théorèmes de convergence : un succès de la théorie . . . . .	265
3.17.5	Le théorème fondamental, les fonctions à variation bornée et les fonctions absolument continues . . . . .	269
3.18	Exercices . . . . .	274
<b>4</b>	<b>L'intégrale de Kurzweil et Henstock</b>	<b>279</b>
4.1	Introduction : des partitions de pas variable . . . . .	280
4.2	Le Lemme de Cousin . . . . .	281
4.3	L'intégrale de Kurzweil et Henstock . . . . .	284
4.4	Propriétés élémentaires . . . . .	288
4.5	Critère de Cauchy et propriété de restriction . . . . .	293
4.6	Intégration et égalité presque partout . . . . .	294
4.7	Les P-divisions et le lemme de Saks-Henstock . . . . .	296
4.8	Le théorème de Hake . . . . .	299
4.9	Fonctions absolument intégrables . . . . .	303
4.10	Lien avec la mesure extérieure . . . . .	308
4.11	Théorèmes de convergence . . . . .	311
4.12	Intégrales indéfinies . . . . .	317
4.13	Intégrales indéfinies des fonctions absolument KH-intégrables . . . . .	328
4.14	Lien avec l'intégrale de Lebesgue . . . . .	331
4.15	Commentaires . . . . .	332
4.15.1	Le « problème fondamental du calcul différentiel et intégral » et ses solutions par Denjoy et Perron . . . . .	333
4.15.2	Le retour de l'intégrale de Perron en théorie des équations différentielles ordinaires : l'apport de Kurzweil et la découverte indépendante de Henstock . . . . .	339
4.15.3	Les sommes de Riemann pour enseigner l'intégrale : les cours de J. Mawhin à l'université de Louvain . . . . .	345
4.16	Exercices . . . . .	347
	<b>Annexes</b>	<b>353</b>
<b>A</b>	<b>Notations et rappels</b>	<b>355</b>
A.1	Ensembles . . . . .	355
A.2	Fonctions . . . . .	356
A.3	Suites . . . . .	358
A.4	Fonctions continues et dérivables . . . . .	359
<b>B</b>	<b>Solutions des exercices</b>	<b>361</b>
B.1	Exercices du chapitre 1 . . . . .	361
B.2	Exercices du chapitre 2 . . . . .	381
B.3	Exercices du chapitre 3 . . . . .	397

---

B.4 Exercices du chapitre 4 . . . . .	412
<b>Bibliographie</b>	<b>427</b>
Ouvrages généraux sur l'intégration . . . . .	427
Pour aller plus loin . . . . .	428
Ouvrages et travaux mentionnés dans les commentaires . . . . .	428
<b>Index</b>	<b>433</b>