1

Autour de la mesure extérieure de Lebesgue

Le présent chapitre sera pour nous l'occasion d'étudier plusieurs notions qui nous seront souvent utiles dans l'étude et la comparaison des différentes théories de l'intégrale qui font l'objet du présent ouvrage. Concernant au premier chef la structure des parties de $\mathbb{R}$, ces notions sont, pour nombre d'entre elles, en rapport avec la *mesure extérieure de Lebesgue*, développée par H. Lebesgue à la suite des travaux d'É. Borel pour résoudre le *problème de la mesure*.

Ce problème peut s'énoncer brièvement ainsi : il s'agit d'attacher à toute partie de la droite réelle un nombre, appelé sa *mesure*, de façon à ce que la mesure d'un intervalle coïncide avec sa *longueur*, et à ce que la mesure d'un ensemble s'écrivant comme l'union de deux parties disjointes, égale la somme des mesures de chacune de ces deux parties.

L'idée d'H. Lebesgue pour résoudre le problème de la mesure, est d'associer à toute partie de $\mathbb{R}$ un nombre réel, appelé sa *mesure extérieure*, et défini comme la borne inférieure des nombres obtenus en sommant les longueurs d'une quantité *au plus dénombrable* d'intervalles suffisant à la recouvrir. Il est alors facile de voir que cette notion coïncide avec celle de longueur pour des parties élémentaires de $\mathbb{R}$: intervalles, unions finies d'intervalles, *etc*. En revanche, l'additivité générale telle qu'énoncée ci-dessus, est incompatible avec l'axiome du choix, comme l'a observé G. Vitali.

En se restreignant cependant à des parties nommées *mesurables*, parmi lesquelles on trouve notamment toutes celles obtenues à partir d'intervalles à l'aide d'une quantité dénombrable d'opérations ensemblistes élémentaires, on peut démontrer une formule d'additivité dénombrable et résoudre le problème de la mesure *pour les parties mesurables*.

C'est à l'étude de la mesure extérieure de Lebesgue et des parties mesurables que nous consacrerons l'essentiel du présent chapitre.

1.1 La mesure extérieure de Lebesgue

La *mesure extérieure de Lebesgue* étend à des parties quelconques de $\mathbb{R}$, la notion de *longueur* définie pour les intervalles (ou pour des combinaisons simples d'intervalles).

Dans la suite, nous désignerons par $\mathscr{I}$ (resp. $\mathscr{I}^*$) la collection de tous les *intervalles* (resp. de tous les *intervalles bornés*) de $\mathbb{R}$. L'introduction de la définition suivante simplifiera les écritures dans la suite.

Définition 1.1. Soit $\mathscr{J} \subseteq \mathscr{I}$ une collection d'intervalles. On dira que $(I_j)_{j\in J}$ est un $\mathscr{J}$*-recouvrement* (resp. un $\mathscr{J}$*-recouvrement fini*) de $E \subseteq \mathbb{R}$ si les conditions suivantes sont satisfaites :

(i) J est un ensemble non vide au plus dénombrable (resp. fini),

(ii) $I_j \in \mathscr{J}$ pour tout $j \in J$,

(iii) $E \subseteq \bigcup_{j\in J} I_j$.

Remarque 1.2. Dans les conditions de la définition précédente, il est évident que l'on pourra toujours supposer *a priori*, si nécessaire, que l'on a $J \subseteq \mathbb{N}$ ou même $J \subseteq D$, où D est un ensemble dénombrable fixé à l'avance.

La *longueur* d'un intervalle *borné et non vide* $I \in \mathscr{I}^*$ est le nombre bien connu

$$\ell(I) := \sup I - \inf I,$$

tandis que l'on posera $\ell(\emptyset) = 0$ et $\ell(I) = \infty$ pour $I \in \mathscr{I}\backslash\mathscr{I}^*$. À partir de cette notion de mesure « élémentaire », nous pouvons définir, à la suite des travaux de Lebesgue (1875-1941), l'éponyme *mesure extérieure de Lebesgue* d'une partie quelconque de $\mathbb{R}$ en utilisant des recouvrements de cette dernière par des intervalles.

Définition 1.3. Étant donné un ensemble $E \subseteq \mathbb{R}$, on appelle *mesure extérieure de Lebesgue de* E le nombre réel étendu $|E| \in [0, +\infty]$ défini par la formule

$$|E| = \inf \left\{ \sum_{j\in J} \ell(I_j) : (I_j)_{j\in J} \text{ est un } \mathscr{I}\text{-recouvrement de } E \right\}.$$

Remarque 1.4. Il suit directement de la définition précédente que l'on a $|\emptyset| = 0$, puisque $\{\emptyset\}$ est un $\mathscr{I}$-recouvrement de $\emptyset$ et que l'on a dès lors $0 \leqslant |\emptyset| \leqslant \ell(\emptyset) = 0$.

Par ailleurs, si $E \subseteq F \subseteq \mathbb{R}$ sont donnés, il suit du fait que tout $\mathscr{I}$-recouvrement de F est aussi un $\mathscr{I}$-recouvrement de E que l'on a $|E| \leqslant |F|$.

Remarque 1.5. Une autre remarque s'impose d'entrée de jeu : on peut remplacer, dans la définition précédente, la collection $\mathscr{I}$ par $\mathscr{I}^*$ sans changer la valeur de l'infimum ; on a en effet, pour tout ensemble $E \subseteq \mathbb{R}$:

$$|E| = \inf \left\{ \sum_{j\in J} \ell(I_j) : (I_j)_{j\in J} \text{ est un } \mathscr{I}^*\text{-recouvrement de } E \right\}.$$

Pour le voir, appelons a l'infimum apparaissant dans l'équation précédente et observons, pour commencer, que l'inégalité $|E| \leqslant a$ suit directement du fait que tout $\mathscr{I}^*$-recouvrement de E est aussi un $\mathscr{I}$-recouvrement de E. L'égalité précédente sera donc démontrée si l'on peut établir l'inégalité inverse $a \leqslant |E|$.

Comme cette dernière inégalité est triviale lorsque $|E| = +\infty$, on suppose désormais que l'on a $|E| < +\infty$. Fixons alors $\varepsilon > 0$ et choisissons, par définition de $|E|$, un $\mathscr{I}$-recouvrement $(I_j)_{j\in J}$ de E pour lequel on a $\sum_{j\in J} \ell(I_j) \leqslant |E| + \varepsilon$. Il vient donc aussi $\ell(I_j) \leqslant |E| + \varepsilon < +\infty$ pour chaque $j \in J$; en particulier, $(I_j)_{j\in J}$ est un $\mathscr{I}^*$-recouvrement de E et on trouve, par définition de a :

$$a \leqslant \sum_{j\in J} \ell(I_j) \leqslant |E| + \varepsilon.$$

L'inégalité voulue s'ensuit car $\varepsilon > 0$ est arbitraire.

Remplacer $\mathscr{I}$ (resp. $\mathscr{I}^*$) par $\mathscr{I} \cap \mathscr{O}$ (resp. $\mathscr{I}^* \cap \mathscr{O}$) ou $\mathscr{I} \cap \mathscr{F}$ (resp. $\mathscr{I}^* \cap \mathscr{F}$) dans la définition et la remarque précédentes, ne change pas non plus la valeur de l'infimum. C'est ce qu'exprime la proposition suivante.

Proposition 1.6. *Étant donné un ensemble $E \subseteq \mathbb{R}$, les cinq nombres suivants sont égaux :*

(i) $|E|$ *;*

(ii) $\inf\left\{\sum_{j\in J} \ell(I_j) : (I_j)_{j\in J} \text{ est un } (\mathscr{I} \cap \mathscr{O})\text{-recouvrement de } E\right\}$ *;*

(iii) $\inf\left\{\sum_{j\in J} \ell(I_j) : (I_j)_{j\in J} \text{ est un } (\mathscr{I} \cap \mathscr{F})\text{-recouvrement de } E\right\}$ *;*

(iv) $\inf\left\{\sum_{j\in J} \ell(I_j) : (I_j)_{j\in J} \text{ est un } (\mathscr{I}^* \cap \mathscr{O})\text{-recouvrement de } E\right\}$ *;*

(v) $\inf\left\{\sum_{j\in J} \ell(I_j) : (I_j)_{j\in J} \text{ est un } (\mathscr{I}^* \cap \mathscr{F})\text{-recouvrement de } E\right\}$.

Démonstration. Appelant a, b, c et d les quatre infima de la liste précédente, nous trouvons immédiatement les relations $|E| \leqslant a \leqslant c$, $|E| \leqslant b \leqslant d$. Pour prouver la proposition, il nous suffit dès lors de prouver qu'ont lieu les inégalités $c \leqslant |E|$ et $d \leqslant |E|$. En particulier, on peut supposer que $|E| < +\infty$, sans quoi ces deux inégalités sont triviales.

Pour prouver la première d'entre elles, il nous faut donc établir que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble au plus dénombrable J et des intervalles $I_j \in \mathscr{I}^* \cap \mathscr{O}$, $j \in J$ pour lesquels on a

$$\sum_{j\in J} \ell(I_j) \leqslant |E| + \varepsilon.$$

Fixons donc $\varepsilon > 0$ et choisissons, à l'aide des Remarques 1.2 et 1.5, un ensemble $J \subseteq \mathbb{N}$ et des intervalles $I'_j \in \mathscr{I}^*$, $j \in J$ pour lesquels on a

$$\sum_{j\in J} \ell(I'_j) \leqslant |E| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour chaque $j \in J$, posons $I_j :=]\inf I'_j - \varepsilon 2^{-j-3}, \sup I'_j + \varepsilon 2^{-j-3}[$. On a bien entendu $I_j \in \mathscr{I}^* \cap \mathscr{O}$ pour chaque $j \in J$; il est aussi clair que l'on a

$$E \subseteq \bigcup_{j \in J} I'_j \subseteq \bigcup_{j \in J} I_j;$$

il vient donc finalement

$$\sum_{j \in J} \ell(I_j) = \sum_{j \in J} \left[\ell(I'_j) + \frac{\varepsilon}{2^{j+2}}\right] \leqslant \sum_{j \in J} \ell(I'_j) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant |E| + \varepsilon,$$

en utilisant les inégalités précédentes, ce qui établit l'inégalité $c \leqslant |E|$.

Pour prouver que $d \leqslant |E|$, il nous faut, comme précédemment, montrer l'existence, pour chaque $\varepsilon > 0$, d'un ensemble au plus dénombrable J et d'intervalles $I_j \in \mathscr{I}^* \cap \mathscr{F}$, $j \in J$ pour lesquels on a

$$\sum_{j \in J} \ell(I_j) \leqslant \varepsilon + |E|.$$

Fixons donc $\varepsilon > 0$, et choisissons, à l'aide de la Remarque 1.5, un ensemble au plus dénombrable J et des intervalles $I'_j \in \mathscr{I}^*$, $j \in J$ pour lesquels on a

$$\sum_{j \in J} \ell(I'_j) \leqslant |E| + \varepsilon.$$

Pour chaque $j \in J$, posons alors $I_j := [\inf I'_j, \sup I'_j]$. On a bien entendu $I_j \in \mathscr{I}^* \cap \mathscr{F}$ pour chaque $j \in J$; il vient aussi

$$E \subseteq \bigcup_{j \in J} I'_j \subseteq \bigcup_{j \in J} I_j;$$

et il vient finalement

$$\sum_{j \in J} \ell(I_j) = \sum_{j \in J} \ell(I'_j) \leqslant |E| + \varepsilon,$$

en utilisant les inégalités précédentes, ce qui établit l'inégalité $d \leqslant |E|$. ■

La mesure extérieure de Lebesgue $|I|$ d'un intervalle est sa longueur $\ell(I)$. Pour le démontrer, nous aurons besoin des Lemmes suivants.

Lemme 1.7. *Si $E \subseteq \mathbb{R}$ est borné, alors $|E| < +\infty$.*

Démonstration. Puisque E est borné, on peut trouver un intervalle borné $I \in \mathscr{I}^*$ contenant E. Comme $\{I\}$ est un $\mathscr{I}^*$-recouvrement de E, il vient, en utilisant la Remarque 1.5, $|E| \leqslant \ell(I) < \infty$. ■

Lemme 1.8. *Soient $a < b$ deux réels. On a $|[a,b]| = |[a,b[| = |]a,b]| = |]a,b[|$.*

Démonstration. Les preuves de ces égalités procèdent toutes d'une même méthode. Nous démontrerons dès lors la première d'entre elles, et laisserons la preuve des autres égalités à l'intérêt du lecteur.

Pour montrer que $|[a,b]| = |[a,b[|$, commençons par observer que l'on a $|[a,b[| \leqslant |[a,b]|$ puisque tout $\mathscr{I}$-recouvrement de $[a,b]$ est aussi un $\mathscr{I}$-recouvrement de $[a,b[$. Pour prouver l'inégalité inverse, fixons $\varepsilon > 0$ et commençons par choisir, en vertu de la Remarque 1.2 et de la Définition 1.3, un ensemble $J \subseteq \mathbb{N}^*$, et des intervalles $I_j \in \mathscr{I}$, $j \in J$ pour lesquels on a :

$$[a,b[\subseteq \bigcup_{j\in J} I_j \quad \text{et} \quad \sum_{j\in J} \ell(I_j) \leqslant |[a,b[| + \varepsilon.$$

Posons alors $I_0 = \{b\}$ et observons que

$$[a,b] \subseteq \bigcup_{j\in J\cup\{0\}} I_j;$$

en particulier, il vient

$$|[a,b]| \leqslant \sum_{j\in J\cup\{0\}} \ell(I_j) = \sum_{j\in J} \ell(I_j) \leqslant |[a,b[| + \varepsilon,$$

puisque $\ell(I_0) = \ell(\{b\}) = 0$. Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, il vient donc $|[a,b]| \leqslant |[a,b[|$ et la démonstration est complète. ■

Lemme 1.9. *Soit $I \in \mathscr{I}^* \cap \mathscr{F}$ un intervalle fermé borné. Si $(I_j)_{j\in J}$ est un $(\mathscr{I}^* \cap \mathscr{O})$-recouvrement fini de I, alors on a*

$$\ell(I) \leqslant \sum_{j\in J} \ell(I_j).$$

Démonstration. Comme le résultat est trivial si $I = \emptyset$, nous supposerons désormais que l'on a $I \neq \emptyset$.

Pour démontrer ce lemme, nous procéderons par induction sur le nombre d'éléments de l'ensemble J. Si J compte un seul élément j_0, on trouve $I \subseteq I_{j_0}$; en particulier, il vient $\inf I_{j_0} \leqslant \inf I$ et $\sup I_{j_0} \geqslant \sup I$, de sorte que

$$\ell(I) = \sup I - \inf I \leqslant \sup I_{j_0} - \inf I_{j_0} = \ell(I_{j_0}).$$

Fixons maintenant $m \in \mathbb{N}^*$, $I \in \mathscr{I}^* \cap \mathscr{F}$ et un $(\mathscr{I}^* \cap \mathscr{O})$-recouvrement $\{I_0, \dots I_m\}$ de I comptant $m+1$ intervalles, et supposons le lemme démontré pour tout $(\mathscr{I}^* \cap \mathscr{O})$-recouvrement d'un intervalle fermé borné comptant au plus m intervalles.

S'il existe un $j_0 \in J$ pour lequel $I_{j_0} \cap I = \emptyset$, observons que la famille finie

$$\{I_0, \dots, I_{j_0-1}, I_{j_0+1}, \dots, I_m\},$$

est un $(\mathscr{I}^* \cap \mathscr{F})$-recouvrement de I comptant m intervalles ; l'hypothèse d'induction entraîne alors que l'on a

$$\ell(I) \leqslant \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq j_0}}^{m} \ell(I_j) \leqslant \sum_{j=0}^{m} \ell(I_j),$$

c'est-à-dire la thèse.

Si, au contraire, on a $I_j \cap I \neq \emptyset$ pour tout $0 \leqslant j \leqslant m$, on commence par remarquer qu'il existe un entier $0 \leqslant j_1 \leqslant m$ pour lequel on a $\inf I_{j_1} < \inf I$: en effet, puisque l'on a $\inf I \in I$ (I est fermé), on déduit de l'inclusion $I \subseteq \bigcup_{j=0}^{m} I_j$ l'existence de $j_1 \in I$ pour lequel $\inf I \in I_{j_1}$; ce j_1 convient puisque I_{j_1} est ouvert, et que dès lors on a $\inf I_{j_1} < \inf I$. Quitte à renuméroter les intervalles $I_0, \ldots, I_m$, on peut supposer que $j_1 = 0$.

Il est encore clair que l'on a $\sup I_0 > \inf I$, sans quoi il viendrait $I_0 \cap I = \emptyset$. Deux cas sont alors à envisager.

Premier cas : $\sup I_0 > \sup I$. Il vient alors $I \subseteq I_0$ et on trouve

$$\ell(I) \leqslant \ell(I_0) \leqslant \sum_{j=0}^{m} \ell(I_j).$$

Second cas : $\inf I < \sup I_0 \leqslant \sup I$. Posons alors $I' := I \setminus I_0 = [\sup I_0, \sup I]$; il vient $I' \in \mathscr{I}^* \cap \mathscr{F}$ et il est clair que l'on a

$$I' \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} I_j,$$

de sorte que l'hypothèse d'induction entraîne l'inégalité

$$\ell(I') \leqslant \sum_{j=1}^{m} \ell(I_j).$$

De l'inégalité $\inf I_0 < \inf I$, on tire finalement

$$\begin{aligned}\ell(I) = \sup I - \inf I = \sup I_0 - \inf I + \sup I - \sup I_0 \\ \leqslant \sup I_0 - \inf I_0 + \ell(I') \leqslant \sum_{j=0}^{m} \ell(I_j),\end{aligned}$$

et le résultat s'ensuit. ■

On peut maintenant démontrer l'égalité $|I| = \ell(I)$ pour tout intervalle I.

Proposition 1.10. *Étant donné $I \in \mathscr{I}$, on a $|I| = \ell(I)$.*

Démonstration. Commençons par remarquer que l'inégalité $|I| \leqslant \ell(I)$ est triviale puisque $\{I\}$ est un $\mathscr{I}$-recouvrement de I et qu'il suit dès lors de la Définition 1.3

que l'on a $|I| \leqslant \ell(I)$. En particulier, on trouve $|\emptyset| \leqslant \ell(\emptyset) = 0$, et la mesure extérieure de Lebesgue de l'ensemble vide est nulle.

Démontrons d'abord l'inégalité contraire dans le cas où I est un intervalle *borné* ; en particulier on a $|I| < +\infty$. Remarquons que l'on peut, sans perte de généralité au vu du Lemme 1.8, supposer dans ce cas que I est aussi *fermé*.

En vertu de la Proposition 1.6, il nous suffit de montrer que l'on a

$$\ell(I) \leqslant \sum_{j \in J} \ell(I_j),$$

pour tout $(\mathscr{I}^* \cap \mathscr{O})$-recouvrement $(I_j)_{j \in J}$ de I. Or I, étant fermé borné, est aussi compact, et il existe dès lors un sous-ensemble fini $J_0 \subseteq J$ pour lequel on a

$$I \subseteq \bigcup_{j \in J_0} I_j;$$

en particulier $(I_j)_{j \in J_0}$ est un $(\mathscr{I}^* \cap \mathscr{O})$-recouvrement de I et le Lemme 1.9 montre dès lors que l'on a $\ell(I) \leqslant \sum_{j \in J_0} \ell(I_j)$. Il vient donc

$$\sum_{j \in J} \ell(I_j) \geqslant \sum_{j \in J_0} \ell(I_j) \geqslant \ell(I),$$

et l'égalité $\ell(I) = |I|$ est démontrée dans le cas où I est un intervalle borné.

Dans le cas où I est un intervalle non borné, il convient de montrer que $|I| = +\infty$. Pour cela, commençons par observer que pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, il existe un intervalle $I_k \in \mathscr{I}^*$ vérifiant $I_k \subseteq I$ et $\ell(I_k) = k$. Il suit alors de la Remarque 1.4 et de la première partie de la preuve que l'on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$k = \ell(I_k) = |I_k| \leqslant |I|.$$

Ceci implique l'égalité $|I| = +\infty$ puisque k est arbitraire ; la démonstration est complète. ■

À partir de ce qui précède, on définit une fonction d'ensembles, la *mesure extérieure de Lebesgue* :

$$|\cdot| \colon \mathscr{P}(\mathbb{R}) \to [0, \infty], E \mapsto |E|.$$

La proposition suivante résume les principales propriétés de la mesure extérieure de Lebesgue.

Proposition 1.11. *La mesure extérieure de Lebesgue vérifie les propriétés suivantes :*

(i) $|\emptyset| = 0$ *;*

(ii) étant donné $E \subseteq F \subseteq \mathbb{R}$*, on a* $|E| \leqslant |F|$ (monotonie *de la mesure extérieure de Lebesgue) ;*

(iii) pour toute famille au plus dénombrable $(E_j)_{j \in J}$ *de parties de* $\mathbb{R}$*, on a*

$$\left| \bigcup_{j \in J} E_j \right| \leqslant \sum_{j \in J} |E_j|$$

(sous-additivité *de la mesure extérieure de Lebesgue).*

Démonstration. Nous avons déjà établi les propriétés (i) et (ii) dans la Remarque 1.4. Pour démontrer la propriété (iii), supposons, sans perte de généralité (voir la Remarque 1.2), que l'on a $J \subseteq \mathbb{N}$ et posons $E := \bigcup_{j\in J} E_j$. Si $\sum_{j\in J} |E_j| = +\infty$, l'inégalité à prouver est triviale. On supposera donc que l'on a $\sum_{j\in J} |E_j| < +\infty$.

Fixons alors $\varepsilon > 0$, et choisissons pour chaque $j \in J$, un ensemble $K_j \subseteq \mathbb{N}$ et un $\mathscr{I}$-recouvrement $(I_{j,k})_{k\in K_j}$ de E_j pour lesquels on a

$$\sum_{k\in K_j} \ell(I_{j,k}) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{j+1}} + |E_j|.$$

On définit alors un ensemble au plus dénombrable

$$K := \bigsqcup_{j\in J} \{j\} \times K_j \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N},$$

et on observe que

$$E = \bigcup_{j\in J} E_j \subseteq \bigcup_{j\in J} \bigcup_{k\in K_j} I_{j,k} = \bigcup_{(j,k)\in K} I_{j,k};$$

en particulier, $(I_{j,k})_{(j,k)\in K}$ est un $\mathscr{I}$-recouvrement de E. Il vient donc

$$|E| \leqslant \sum_{(j,k)\in K} \ell(I_{j,k}) = \sum_{j\in J} \sum_{k\in K_j} \ell(I_{j,k}) \leqslant \sum_{j\in J} \left(\frac{\varepsilon}{2^{j+1}} + |E_j|\right) \leqslant \varepsilon + \sum_{j\in J} |E_j|.$$

L'inégalité $|E| \leqslant \sum_{j\in J} |E_j|$ s'ensuit car $\varepsilon > 0$ est arbitraire. ∎

Remarque 1.12. Dans les conditions de la proposition précédente, on observera que, dans la propriété (iii), le caractère au plus dénombrable de la famille $(E_j)_{j\in J}$ est essentiel. Observons en effet que l'on a, pour chaque $x \in [0,1]$, $|\{x\}| = \ell(\{x\}) = 0$, mais qu'en revanche, il vient

$$\left|\bigcup_{x\in[0,1]} \{x\}\right| = |[0,1]| = 1 > 0 = \sum_{x\in[0,1]} |\{x\}|.$$

La mesure extérieure de Lebesgue est aussi *invariante par translation*.

Proposition 1.13. *Pour tout $E \subseteq \mathbb{R}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|x+E| = |E|$.*

Démonstration. L'égalité $\ell(x+I) = \ell(I)$ est claire pour tout intervalle I. On démontre alors que $|x+E| \leqslant |E|$ en observant que si $(I_j)_{j\in J}$ est un $\mathscr{I}$-recouvrement de E, alors $(x+I_j)_{j\in J}$ est un $\mathscr{I}$-recouvrement de $x+E$ de sorte que

$$|x+E| \leqslant \sum_{j\in J} \ell(x+I_j) = \sum_{j\in J} \ell(I_j).$$

L'inégalité $|x+E| \leqslant |E|$ se déduit alors de la Définition 1.3 et de ce que $(I_j)_{j\in J}$ est un $\mathscr{I}$-recouvrement arbitraire de E.

Pour démontrer que $|E| \leqslant |x+E|$, il suffit d'observer que $E = -x + (x+E)$ et d'utiliser le cas précédent. ∎

La mesure extérieure de Lebesgue est homogène.